

# ИНЖЕНЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА

УДК 687.016:515.2

С. В. ПАВЛОВА

Восточно-Сибирский государственный  
технологический университет,  
г. Улан-Удэ

## К ВОПРОСУ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ИЗДЕЛИЙ СО СЛОЖНОЙ ФОРМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В статье рассмотрены некоторые теоретические аспекты решения задач проектирования разверток поверхностей сложных форм с помощью задания вспомогательной торсовой поверхности.

**Ключевые слова:** поверхность, развертка, геометрическое моделирование, геодезическая кривая.

Как известно, одной из основных задач автоматизированного проектирования изделий индустрии моды является получение плоских шаблонов — деталей изделий со сложной поверхностью, к которым относятся одежда, обувь, головные уборы. Приближенная развертка заданного участка поверхности двойной кривизны складывается из элементарных геометрических фигур — условных разверток элементов поверхности, полученных в результате членения ее различным образом. Членение поверхности на отдельные участки осуществляется с помощью геодезических кривых, служащих исходными линиями развертывания. Дальнейшее развертывание полученных в результате членения участков произво-

дится с помощью аппроксимации исходной поверхности сложной формы плоскостью либо другой, развертывающейся поверхностью. Известно, что наилучшим посредником при подобном геометрическом моделировании являются торсовые поверхности [1].

В тех случаях, когда форма исходной поверхности не позволяет выполнение обычного членения на элементарные участки геодезическими линиями (например, в местах сочленения разных по форме поверхностей), необходим другой подход [2, 3]. Ранее авторами было предложено теоретическое обоснование [2] и вычислительное проектирование [4] метода построения развертки для некоторого участка поверхности на основе построения негеодезической

кривой и аппроксимации исходной поверхности торсовым посредником.

Указанный способ включает задачи построения вспомогательной торсовой поверхности, огибающей исходную поверхность по заданной кривой сложной конфигурации и, далее, развертывания на плоскость торсового посредника [3, 5].

Вычислительный эксперимент, рассмотренный в работе [4], позволил выделить из конгруэнции линейчатых поверхностей искомый вспомогательный торс, аппроксимирующий заданный участок поверхности. Завершить процесс получения искомой развертки — плоского шаблона детали изделия — позволит решение задачи построения развертки выделенного линейчатого посредника. Решение задачи развертывания торсовой оболочки, в свою очередь, основано на свойстве инвариантности коэффициентов первой квадратичной формы поверхности. Развертывание должно производиться с непрерывным уменьшением кручения и при сохранении кривизны развертываемой линии. В этом случае стрикционная линия торса вырождается в плоскую кривую, кручение которой равно нулю. Прямолинейные образующие торса, касательные к ребру возврата, останутся касательными и к плоской кривой. Таким образом, под разверткой торса обычно понимают его ребро возврата после изгибания поверхности на плоскость. В дальнейшем оно может использоваться как базовая линия для построения кривых на развертке. Указанные кривые ограничивают отсек торса в пространстве, т.е. определяют некоторый участок поверхности, далее модифицируемый в искомый шаблон детали изделия. При задании уравнения ребра возврата вспомогательного торса в параметрической форме, с длиной дуги  $s$  в качестве параметра уравнение торсовой поверхности [1], будет

$$r_T = \bar{r}_T(v, s), \quad (1)$$

где  $v$  — параметр, величина которого определяет расстояние от точки касания образующей до произвольной точки на ней. Если выразить  $v$  как некоторую непрерывную функцию параметра, то уравнение некоторой линии, принадлежащей торсу, определяется формулой

$$\bar{r} = r(s) + f(s) r'(s). \quad (2)$$

Задание уравнения ребра возврата вспомогательной торсовой поверхности определяет зависимость между координатами точек на посреднике  $r_{TF}$  и ее развертке  $r_{RVT}$  в виде

$$r_{RVT} = f(r_{TF}). \quad (3)$$

Для разработки математической модели задания и развертывания торсовой поверхности на плоскость рассмотрена следующая последовательность рассуждений. Торс задается своей стрикционной линией, задания которой достаточно для построения его развертки. Натуральные уравнения ребра возврата торсовой поверхности суть

$$k = k(s), \quad \tau = \tau(s). \quad (4)$$

где  $k$  — кривизна, а  $t$  — кручение соответствующей пространственной кривой.

Пусть кривая (1) есть ребро возврата торсовой поверхности, тогда

$$k = k(s), \quad \tau = 0 \quad (5)$$

— натуральные уравнения плоского ребра возврата после развертывания торса на плоскость [1]. Уравне-

ния (5) получены из условия, что кривизна кривой на торсе есть инвариант изгиба, так как  $k = \lim \psi / \Delta s$ , где  $\psi$  — угол смежности касательных к соответствующей пространственной кривой. Если уравнение ребра возврата задано в параметрической форме с длиной дуги  $s$  в качестве параметра, уравнение торсовой поверхности будет

$$r_T = \bar{r}_T(v, s) = \bar{\rho}(s) + v \bar{l}(s), \quad (6)$$

где  $\bar{\rho}(s)$  — текущий радиус-вектор ребра возврата:

$$\bar{\rho}(s) = x(s)\bar{i} + y(s)\bar{j} + z(s)\bar{k}, \quad (7)$$

а единичный касательный вектор  $\bar{l}(s)$ , заданный в каждой точке ребра возврата, определяется по формуле

$$\bar{l}(s) = \bar{\rho}'(s) = x'(s)\bar{i} + y'(s)\bar{j} + z'(s)\bar{k}. \quad (8)$$

С учетом формул (7, 8) уравнение торсовой поверхности принимает вид уравнения

$$\begin{aligned} \bar{r}_T(u, s) = [x(s) + v \cdot x'(s)]\bar{i} + [y(s) + v \cdot y'(s)]\bar{j} + \\ + [z(s) + v \cdot z'(s)]\bar{k}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $v$  — параметр, величина которого определяет расстояние от точки касания образующей до произвольной точки на ней.

Если выразить  $v$  как некоторую непрерывную функцию параметра  $s$  и подставить ее значение в формулу (9), получим уравнение некоторой линии, принадлежащей торсу

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x(s) + f(s)x'(s) \\ \bar{y} &= y(s) + f(s)y'(s) \\ \bar{z} &= z(s) + f(s)z'(s). \end{aligned} \quad (10)$$

Согласно утверждению, что при изгибании торса на плоскость все его геодезические линии становятся прямыми, и теореме Джеллета [1], отрезок  $v$  сохраняет прямолинейность, а дуга  $s$  — кривизну в каждой точке. Координаты точек плоского ребра возврата связаны с координатами точек пространственной линии зависимостью

$$\bar{x} = \int_0^s \cos \left( \int_0^s k(s) ds \right) ds, \quad \bar{y} = \int_0^s \sin \left( \int_0^s k(s) ds \right) ds, \quad (11)$$

где  $\bar{x}, \bar{y}$  — координаты точек плоского ребра возврата, а  $k$  — кривизна пространственного ребра возврата как функция длины его дуги.

Если за параметр взята дуга, кривизна кривой выражается формулой

$$k = |\ddot{r}_{ss}| = \sqrt{\ddot{x}_{ss}^2 + \ddot{y}_{ss}^2 + \ddot{z}_{ss}^2}. \quad (12)$$

При этом зависимость между координатами точек на торсовой поверхности и развертке получает вид

$$y_p = \int_0^s \sin \left( \int_0^s k(s) ds \right) ds + v \sin \left( \int_0^s k(s) ds \right) \quad (13)$$

$$x_p = \int_0^s \cos \left( \int_0^s k(s) ds \right) ds + v \cos \left( \int_0^s k(s) ds \right).$$

Таким образом, система уравнений (13) задает последовательность развертывания вспомогательной поверхности на плоскость [6].

Формулы изометрического отображения тора на плоскость следующие:

$$X = X(t) + \frac{u\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} X'(t)}{\sqrt{[X'(t)]^2 + [Y'(t)]^2}} \quad (14)$$

$$Y = Y(t) + \frac{u\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} Y'(t)}{\sqrt{[X'(t)]^2 + [Y'(t)]^2}}.$$

Криволинейные координаты  $u, t$  произвольной точки  $M$  на поверхности тора определяют, с одной стороны, точку в пространстве посредством уравнений

$$x = x(t) + ux'(t), \quad y = y(t) + uy'(t), \\ z = z(t) + uz'(t), \quad (15)$$

а с другой — соответствующую ей в изометрическом отображении точку  $M$  на плоскости развертки посредством уравнений (15). Если на поверхности тора задана линия своим внутренним уравнением

$$u = u(t), \quad (16)$$

то ее уравнение на развертке получим подстановкой в (14) вместо него уравнения (15).

Таким образом, построение развертки торсового посредника позволит завершить методическое обоснование получения развертки участка поверхности [5], построенного вокруг негеодезической кривой сложной формы.

## Библиографический список

1. Кривошапко, С.Н. Торсовые поверхности и оболочки: справочник [Текст] / С.Н. Кривошапко — М.: УДН, 1991. — 280 с.
2. Найханов, В.В. Построение разверток при проектировании одежды [Электронный ресурс] / В.В. Найханов, С.В. Павлова // Тр. междунар. конф. по компьютерной графике и ее приложениям «ГрафиКон-98» / 7–11 сентября 1998 г. — М., 1998. — 1 электрон. опт. диск (CD-ROM): цв.; 12 см.
3. Павлова, С.В. Моделирование процесса геометрического проектирования кривых и поверхностей изделий индустрии моды. [Текст] / С.В. Павлова // Естественные и технические науки. — 2008. — № 5 (37). — С. 321–323.
4. Павлова, С.В. К вопросу геометрического проектирования изделий индустрии моды [Текст] / С.В. Павлова, Т.В. Аюшеев, В.В. Найханов // Вестник ВСГТУ. — Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ. — 2009. — № 3. — С. 77–83.
5. Павлова, С.В. Разработка системного комплекса средств геометрического моделирования для САПР изделий индустрии моды. [Текст] / С.В. Павлова // Естественные и технические науки. — 2008. — № 2 (34). — С. 430–433.
6. Скидан, И.А. Развертка торсов [Текст] / И.А. Скидан // Прикладная геометрия и инженерная графика. — Киев, 1988. — Вып. 46. — С. 35–37.

**ПАВЛОВА Светлана Владимировна**, старший преподаватель кафедры «Технология изделий легкой промышленности».

Адрес для переписки: e-mail: [tasvepa@mail.ru](mailto:tasvepa@mail.ru)

Статья поступила в редакцию 17.12.2009 г.

© С. В. Павлова

## Книжная полка

**Волошин-Челпан, Э. К. Начертательная геометрия. Инженерная графика [Текст]: учеб. для вузов по хим.-технол. специальностям / Э. К. Волошин-Челпан; Моск. гос. акад. тонкой хим. технологии им. М. В. Ломоносова. — М.: Акад. проект, 2009. — 182 с.: рис., табл. — (Gaudeamus) (Фундаментальный учебник). — ISBN 978-5-8291-0998-1.**

В учебнике даны все темы в соответствии с государственным общероссийским стандартом направления 550800, химическая технология и биотехнология ОПД.Ф.01 дисциплины «Начертательная геометрия. Инженерная графика» и разработанной на его основе примерной программой этой дисциплины.

**Инженерная графика. Геометрические основы конструирования [Текст]: учеб. пособие для вузов по направлению подгот. «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» / В. Г. Григорьев [и др.]; Твер. гос. техн. ун-т. — 3-е изд., перераб. и доп. — Тверь: Изд-во ТГТУ, 2008. — 155 с. — ISBN 978-5-7995-0418-2.**

Материал по инженерной графике изложен без традиционного деления на начертательную геометрию и черчение. Курсы объединены и направлены на развитие навыков активного конструирования.

**Инженерная графика. Введение в конструирование [Текст]: учеб. пособие для вузов по направлению «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» / В. Г. Григорьев [и др.]; Твер. гос. техн. ун-т. — 2-е изд., перераб. и доп. — Тверь: Изд-во ТГТУ, 2009. — 108 с. — ISBN 978-5-7995-0475-5.**

Материал по инженерной графике изложен без традиционного деления на начертательную геометрию и черчение. Курсы объединены и направлены на развитие навыков активного конструирования. Инженер постоянно имеет дело с чертежами. При этом ему приходится не только читать чертежи, но и заниматься вопросами конструирования, когда поиск оптимальных решений идет с использованием графических методов, а результат конструирования представляется в виде чертежа. Главное назначение данного пособия — подготовить к конструированию и рассмотрению графических моделей реальных технических изделий.