ИНЖЕНЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА

УДК 687.017:514.144

Е. А. БАЛАНДИНА

Омский государственный институт сервиса

ФОРМИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СЛОЖНОЙ КАРКАСНОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ПОЛУЧЕНИЕ ЕЕ РАЗВЕРТКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К КОНСТРУИРОВАНИЮ ОДЕЖДЫ

В статье рассматривается процесс построения геометрической модели сложных каркасных поверхностей на основе перспективно-числовой модели пространства, с использованием NURBS-представления и получение развертки геометрической модели поверхности тела человека с использованием способа аппроксимации отсеками торсовых поверхностей применительно к конструированию швейных изделий.

Ключевые слова: автоматизированное проектирование одежды, перспективно-числовая модель пространства, реконструкция поверхностей, NURBS-поверхности, развертка поверхности, торсовая поверхность, триангуляция.

В настоящее время одним из перспективных направлений совершенствования процесса производства одежды является создание систем автоматизированного проектирования, обеспечивающих получение конструкций деталей одежды с высокими показателями качества.

Исследования в области трёхмерного проектирования конструкций деталей одежды ведутся в соответствии с общим направлением развития САПР сложных объектов. При этом одной из важнейших задач в системе 3-CAD является математическое моделирование поверхностей. Использование геометрических моделей делает возможным быструю и точную визуализацию объектов, что позволяет выявить ошибки проектирования уже на ранних этапах. Основой для построения конструкций одежды в пространственных системах является плоскостное изображение объемного тела. Развертка позволяет получить наиболее полную характеристику сложной пространственной формы фигуры человека, дает представление о величинах, направлениях и местах расположения вытачек, конструктивных точек и линий, областей технологической обработки.

В геометрическом моделировании математическое представление и визуализация поверхностей является эффективным инструментом изучения свойств физических объектов. Реконструкция поверхностей динамично развивающаяся область инженерного анализа, интерес к которой на сегодняшний день очень высок. Программное обеспечение, предназначенное для реконструкции пространственных объектов, используется в качестве модуля в составе систем автоматизированного проектирования для автоматического построения геометрической модели объекта.

Объектом исследования является процесс формирования геометрической модели сложных каркасных поверхностей, к числу которых относится поверхность тела человека, применительно к проектированию изделий легкой промышленности.

Поверхность тела человека представляет собой сложную незакономерную поверхность. Для современных методов реконструкции пространственных объектов возникает необходимость получения достаточно точной информации о размерах и форме. Точность и время измерения поверхности тела человека возможно обеспечить только бесконтактными методами исследований, позволяющими получить данные о форме сложных пространственных тел в разных ракурсах.

Для получения исходной информации о форме тела человека используется математический аппарат перспективно-числовой модели трехмерного евклидова пространства [1], который позволяет, используя центральную проекцию объекта и дополнительные данные к изображению, реконструировать этот объект.

Целью этапа построения поверхности объекта является получение математической модели физической поверхности, отвечающей заданным требованиям точности, гладкости и компактности. NURBS-представление полностью удовлетворяет всем приведенным выше требованиям [2].

Получение исходного массива [3]. В качестве исходных данных для построения поверхности используются координаты точек на фотографическом снимке, их координаты на физическом объекте и параметры: средняя высота фотографирования и приближенное фокусное расстояние. Для получения трехмерных координат, которые впоследствии используются в качестве вершин контрольной сети, вводятся четыре системы координат, не все из которых являются евклидовыми прямоугольными системами координат.

Система координат исходного объекта (СКИО): Ось OY — вертикальная ось симметрии объекта (она является осью высоты объекта), ось OX направлена вправо, ось OZ — против луча зрения. Эта система координат обрабатывается фотокамерой и преобразуется в систему координат фотоснимка (СКФ) с помощью двух преобразований: перспективного преобразования центральной проекции, преобразования проецирования.

Система координат фотоснимка (СКФ). Это двухмерная система координат. Для решения задачи восстановления трехмерных координат берется перспективно-числовая модель пространства, где используется тот факт, что создаваемое камерой преобразование перспективное и на объект нанесена световая сеть с известным шагом между линиями. По сравнению с исходными формулами перспективно-числовой модели, оси $o'x'$ и $o'y'$ меняются (происходит поворот вокруг оси $o'x'$ на 90 градусов). Данная система координат выбрана как наиболее применяемая в компьютерной графике.

Преобразования перспективно-числовой модели описываются следующими формулами [1]:

$$A_x = A_x^{'} - \frac{A_x^{'}\left(h + A_y^{'} - OS_y\right)}{A_y^{'}}, \quad (1)$$

$$A_z = f + \frac{\left(h - A_y^{'} - OS_y\right)S_y}{A_y^{'}}, \quad (2)$$

$$A_y = h, \quad (3)$$

где S — точка фокуса фотокамеры, A' — координаты точки на фотоснимке, A — трехмерные координаты точки, h_{oy} — координата первой полосы, OS_y — y координата точки фокуса, h — h_o + (номер полосы — 1) (высота полосы), f — фокусное расстояние камеры.

В результате этого получают трехмерные координаты точек поверхности в системе координат расчета (СКР). В этой системе координат производятся все «трехмерные» расчеты.

Точка начала СКР соответствует точке начала координат СКИО. Координаты всех точек объекта в СКР находятся в диапазоне:

$$x \in [-1, 1], y \in [-1, 1], z \in [-1, 1].$$

Система координат поверхности объекта (СКПО). В этой системе координат производятся измерения расстояний вдоль поверхности объекта. Эта система криволинейная. Координаты точек СКПО одновременно являются и параметрическими координатами NURBS-поверхности.

Если заданы двухмерные координаты точки в СКПО, то 3D-координаты этой точки в СКР получают следующим образом:

$$r(u,v) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P_{i,j} N_{i,k}(u) N_{j,q}(v),$$

где $P_{i,j}$ — 3D-координаты вершин опорной сети, $N_{i,k}(u)$, $N_{j,q}(v)$ — базисные функции B-сплайнов в соответствующих параметрических направлениях. СКПО используется для построения NURBS-поверхности.

Вследствие того, что форма и гладкость построенной при помощи NURBS-поверхности пространственного объекта зависит от параметризации исходных данных, выбор способа параметризации был осуществлен с учетом регулярности сети и равномерности расположения точек исходных данных. Управляющий вектор вычисляется по равномерно расположенным параметрам, значения которых не меняются после аффинных и проективных преобразований.

Поскольку при получении оцифрованных точек, возможны погрешности измерений, в данном алгоритме используется интерполяционный метод построения NURBS-поверхности. Количество разбиений сечений выбирается по критерию минимального количества узловых точек при заданной точности.

Для получения сведения о форме поверхности реконструируемого объекта, съемка производится в трех ракурсах под углом ≈120°, каждый из полученных образов расположен в своей системе координат. Для восстановления точного взаимного расположения снимков и их преобразования в общую систему координат на поверхности физического объекта намечаются маркеры. Используя матрицы преобразования метода парных точек, осуществляется построение и перевод полученных перспективно-числовой моделью координат в единую систему координат расчета.

Используя преобразования перспективно-числовой модели, формулу NURBS-поверхности можно выразить следующим образом:

$$r(u,v)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} w_{i,j}P_{i,j}N_{i,k}(u)N_{j,q}(v)}{\sum_{i=1}^{n1}\sum_{j=\mathbf{1}}^{m} w_{i,j}N_{i,k}(u)N_{j,q}(v)},$$

учитывая формулы (1 – 3)

$$\boldsymbol{P}_{ij}=\left[A_x^{'}-\frac{A_x^{'}\left(h+A_y^{'}-OS_y\right)}{A_y^{'}},y_0+h_j,f+\frac{\left(h-A_y^{'}-OS_y\right)}{A_y^{'}}\right],$$

где h — высота полосы, y_o — высота начальной полосы,

$[A_x', A_y']$ — 2D-координаты на снимках в системе координат фотоснимка,

$$r(u,v)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}w_{i,j}N_{i,k}(u)N_{j,q}(v)}{}\to$$

$$\to\frac{\left[A_x^{'}-\frac{A_x^{'}\left(h+A_y^{'}-OS_y\right)}{A_y^{'}},y_0+h_j,f+\frac{\left(h-A_y^{'}-OS_y\right)}{A_y^{'}}\right]}{\sum_{i=1}^{n1}\sum_{j=1}^{m}w_{i,j}N_{i,k}(u)N_{j,q}(v)}.$$

Для дальнейшего использования NURBS-поверхности строится полигональная аппроксимация, состоящая из набора связанных друг с другом четырехугольников. Для поиска оптимального соотношения между гладкостью реконструируемой поверхности и затраченным компьютерным ресурсом проводилась реконструкция поверхности с различной степенью гладкости. Построенная поверхность имела размерность 12x12 узлов. Сравнительный анализ результатов позволил выбрать в качестве оптимальной, поверхность степени 4x4.

Для выбора оптимального расстояния между вводимыми оцифрованными точками и сечениями проводилось построение поверхности с различным шагом ввода точек. Анализ результатов показал, что в качестве оптимального расстояния между вводимыми оцифрованными точками и сечениями достаточно взять шаг 25 мм.

Для совершенствования формы и контуров деталей одежды необходимо выполнение условия их соответствия одеваемой поверхности. В системах автоматизированного проектирования основой для построения конструкции одежды является плоскостное изображение объёмного тела — развёртка. Развёртка в этих задачах является наиболее удобной для определения характеристик сложной пространственной формы исследуемой поверхности и даёт представление о величинах, направлениях и местах расположения вытачек, конструктивных точек и линий, областей технологической обработки.

Вследствие того, что поверхность тела человека представляет собой сложную, неразвёртывающуюся поверхность, точное построение развёртки такой поверхности невозможно. Приближённая замена такой поверхности множеством более простых, например торсовых, представляет большой практический интерес.

Для того чтобы полученную поверхность тела человека аппроксимировать отсеками торсовых поверхностей, необходимо геометрическую модель задать последовательностью поперечных сечений.

Целенаправленное использование такого способа задания поверхности диктует необходимость оптимального выбора положения сечений. Возможны два варианта: расположение сечений по возрастанию/убыванию высоты через известный интервал (например, 1÷1,5 см) и неравномерное расположение сечений. Положение сечений выбирается с учётом ориентации на антропометрические точки, необходимые для снятия размерных признаков при изготовлении одежды (такие как точка основания шеи, плечевая, передний и задний углы подмышечных впадин, сосковая, ягодичная), и на конструктивные основные уровни (линии груди, линии талии, линии бёдер, линии глубины проймы). Помимо этого, учитывая естественную пластику поверхности фигуры, для верхней опорной части и в местах повышенной сложности берутся дополнительные сечения.

Аппроксимация NURBS-поверхности тела человека отсеками торсовых поверхностей осуществляется в следующей последовательности.

1. На геометрической модели тела человека намечаются места расположения поперечных сечений.

Используя разработанную методику вывода поперечных сечений, строится новая геометрическая модель, которая задаётся каркасом из NURBS-кривых.

2. Строится торсовая поверхность. Задача построения торсовой поверхности сводится к заданию направляющей и образующей. За направляющие линии поверхности принимаются пространственные NURBS-кривые (координата y = const). Образующие торсовой поверхности находятся следующим образом:

—выбираются две смежные NURBS-кривые: $z=\varphi_1(x)$, $z=\varphi_2(x)$;

—на одной из кривых определяются точки с определённым шагом, соответствующим требованиям точности, координаты этих точек известны:

$$\{(x_1,z_1),\ (x_2,z_2),\ldots\ldots,(x_3,z_3)\};$$

—вычисляется угловой коэффициент касательной к кривой в данной точке: $m=\varphi_1'(x)$;

—исходя из определения торсовой поверхности [4], для построения образующей необходимо, чтобы угловые коэффициенты касательных в соответствующих точках на двух смежных кривых были равны: $m=\varphi_1'(x)=\varphi_2'(x)$;

—из соотношения $m=\varphi_1'(x)=\varphi_2'(x)$ находится координата x, пересечения образующей и кривой $\varphi_2'(x)$;

—координата z находится из уравнения кривой;

—может оказаться, что точки, вычисленные на второй кривой, не удовлетворяют условиям точности. Тогда на первой кривой выбор точек происходит методом половинного деления до тех пор, пока на второй кривой не будет достигнута требуемая точность. Когда шаг выбора точек окажется меньше некоторого предельного значения, а требуемая точность не будет достигнута, получающийся отсек торсовой поверхности вырождается в отсек конической поверхности с вершиной в выбранной точке;

—точки соединяют прямой линией, которая является образующей торсовой, конической, цилиндрической поверхностей;

—процесс повторяется на следующей точке кривой, и таким образом проходит по всей кривой;

—далее берётся следующая NURBS-кривая и строится новая торсовая поверхность, координаты точек образующей на первой кривой известны из расчётов выше;

—вычисляются соответствующие координаты точек образующей на новой кривой.

3. Каждая торсовая поверхность аппроксимируется множеством четырехугольных граней между парой соответствующих 3D-сечений.

При конструировании развёрток применяется способ аппроксимации неразвертывающихся поверхностей — триангуляции.

Построение развертки осуществляется поэтапно:

1. Разбиение поверхности в интерактивном режиме на структурные формообразующие элементы (объемные модули).

2. Получение развертки единичных модулей поверхности.

3. Формирование разверток модулей в единую развертку.

4. Оформление контуров развертки.

Технология формирования разверток модулей осуществляется итерационно в интерактивном режиме.

Точность полученной модели зависит от точности получения исходных данных, от количества введённых опорных точек и последующей NURBS-интерполяции поверхности, а также параметров построенной NURBS-поверхности.

Разработанные методы и алгоритмы построения развёртки геометрической модели поверхности тела человека с использованием способа аппроксимации отсеками торсовых поверхностей и триангуляции позволяют получить развертку построенной поверхности тела человека с необходимой точностью.

Целью разработанной программы «Реконструкция пространственных объектов, представленных дискретным множеством цифровых данных» стала реализация алгоритма построения пространственного объекта с помощью NURBS-представления с использованием аппарата перспективно-числовой модели пространства и метода получения развертки.

Разработанная программа предназначена в первую очередь для предприятий легкой промышленности, в то же время может быть рекомендована для изучения любых пространственных объектов.

Библиографический список

1. Баландина, Е. А. Реконструкция объекта по его центральной проекции (фотоснимку) с использованием аппарата перспективно-числовой модели пространства / Г. Т. Караулова, Е. А. Баландина, И. В. Лашина // Актуальные проблемы подготовки специалистов для сферы сервиса : сб. докл. Междунар. науч.-практ. конф. — Омск : ОГИС, 2003. — Ч. 2. — С. 48—50.

2. Голованов, Н. Н. Геометрическое моделирование / Н. Н. Голованов — М. : Изд-во физ.-мат. лит., 2002. — 472 с.

3. Баландина, Е. А. Реконструкция поверхности геометрической модели манекена фигуры человека, представленного дискретным набором цифровых данных / Е. А. Баландина // Тенденции и перспективы развития лёгкой промышленности, повышение конкурентоспособности товаров в период подготовки к вступлению России в ВТО. II Международный фестиваль. Формула моды : матер. науч.-практ. конф. — Омск : ОГИС, 2005. — С. 65.

4. Гордон, В. О. Курс начертательной геометрии / В. О. Гордон, М. А. Семенцев-Огиевский ; под ред. В. О. Гордона и Ю. Б. Иванова. — 25-е изд. — М. : Высш. шк., 2003. — 272 с.

БАЛАНДИНА Елена Александровна, кандидат технических наук, доцент кафедры конструирования швейных изделий.

Адрес для переписки: e-mail: Balandina_elena@mail.ru

Статья поступила в редакцию 01.12.2011 г.

Книжная полка

Кувшинов, Н. С. Приборостроительное черчение : учеб. пособие для вузов / Н. С. Кувшинов, В. С. Дукмасова. – М. : КноРус, 2011. – 400 с. – ISBN 978-5-406-01507-0.

Представлен материал по дисциплине «Инженерная графика». Для выполнения конструкторской документации изделий приборостроения, как самостоятельной системы, предложены структурные модели с постоянными и переменными компонентами. Модели конкретизированы и приведены к виду в соответствии с решаемыми задачами. Комплексно учтены особенности и классификация изделий, закономерности геометрической формы и используемые материалы, наличие разъемных и неразъемных соединений, технология изготовления деталей и сборочных единиц, простановка размеров в зависимости от технологии изготовления деталей, сборка готовых изделий из деталей и сборочных единиц и укрупненных элементов. Приведены необходимые справочные данные и многочисленные примеры выполнения рабочих чертежей деталей, сборочных единиц, сборочных чертежей реальных изделий приборостроения, учитывающие специфику последних. Для студентов вузов электротехнических и приборостроительных специальностей для выполнения учебных заданий, курсовых и дипломных проектов.

УДК 514.742.2:514.181

Л. К. КУЛИКОВ

Омский государственный технический университет

СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ ПРИ ПОСТРОЕНИИ МОДЕЛЕЙ АФФИННЫХ ПРОСТРАНСТВ

В векторном n-мерном пространстве рассмотрены системы p векторов, которые образуют векторное пространство S_n^p размерности pn. Показана возможность, при переходе к аффинным пространствам получать различные геометрические модели пространств, что необходимо при решении прикладных задач многомерной геометрии.

Ключевые слова: вектор, пространство, геометрическая модель.

В векторном n-мерном пространстве V_n (базис — $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$) рассмотрим множество S_n^p систем векторов, т.е. множество, элементами которого являются наборы векторов $(\mathbf{a}_i)=(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_p)$. Системы векторов $(\mathbf{a}_i)=(\mathbf{b}_i)$, $i=1, 2, ..., p$ равны, если $\mathbf{a}_i=\mathbf{b}_i$. Операции сложения и умножения на действительное число введем следующим образом

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_p)+(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_p)= \\ =(\mathbf{a}_i+\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2+\mathbf{b}_2, ..., \mathbf{a}_p+\mathbf{b}_p) \quad (1)$$

$$k(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_p) = (k\mathbf{a}_i, k\mathbf{a}_2, ..., k\mathbf{a}_p). \quad (2)$$

Проверкой аксиом векторного пространства доказывается, что множество систем векторов S_n^p является векторным пространством [1]. Элементы этого пространства назовем s-векторами. При этом нулевым s-вектором является набор $(\mathbf{0}_i)=(\mathbf{0}, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0})$, а противоположным к (ai) s-вектором − набор $(-\mathbf{a}_1, -\mathbf{a}_2, ..., -\mathbf{a}_p)$. Линейной комбинацией $(\mathbf{a}_i)$, $(\mathbf{b}_i)$, ..., $(\mathbf{d}_i)$, будет s-вектор

$$(\mathbf{f}_i)=\alpha(\mathbf{a}_i)+\beta(\mathbf{b}_i)+...+\gamma(\mathbf{d}_i). \quad (3)$$

Система s-векторов $(\mathbf{a}_i)$, $(\mathbf{b}_i)$, ..., $(\mathbf{d}_i)$ линейно зависима, если $(\mathbf{f}_i)=(\mathbf{0}_i)$ и среди чисел α, β, ..., γ есть хотя бы одно, не равное нулю. Формула (3) в случае линейной зависимости приводит к линейной зависимости векторов по каждому из p мест, т.е. имеем p систем линейно зависимых векторов.

Любой s-вектор можно записать следующим образом

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_p)=(\mathbf{a}_1, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0})+(\mathbf{0}, \mathbf{a}_2, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0})+...+ \\ +(\mathbf{0}, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0}, \mathbf{a}_p). \quad (4)$$

Учитывая, что $\mathbf{a}_k=\mathbf{a}_k^1\mathbf{e}^1+...+\mathbf{a}_k^n\mathbf{e}^n$, окончательно получим

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_p)=(a_1^1\mathbf{e}^1, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0})+ \\ +(a_1^2\mathbf{e}_2, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0})+... +(a_1^n\mathbf{e}_n, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0})+ \\ +(\mathbf{0}, a_2^1\,\mathbf{e}_1, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0})+(\mathbf{0}, a_2^2\mathbf{e}_2, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0})+...+ \\ +(\mathbf{0}, a_2^n\,\mathbf{e}_n, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0})+ ... \\ +(\mathbf{0}, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0}, a_p^1\mathbf{e}_1)+(\mathbf{0}, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0}, a_p^2\mathbf{e}_2)+...+ \\ +(\mathbf{0}, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0}, a_p^n\mathbf{e}_n)= \quad (5)$$

$$a_1^1(\mathbf{e}_1, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0})+a_1^2(\mathbf{e}_2, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0})+...+a_1^n(\mathbf{e}_n, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0})+ \\ +a_2^1(\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0})+ \\ +a_2^2(\mathbf{0}, \mathbf{e}_2, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0})+...+a_2^n(\mathbf{0}, \mathbf{e}_n, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0})+...+ \\ +a_p^1(\mathbf{0}, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0}, \mathbf{e}_1)+a_p^2(\mathbf{0}, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0}, \mathbf{e}_2)+...+ \\ +a_p^n(\mathbf{0}, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0}, \mathbf{e}_n).$$

Базисом пространства S_n^p являются s-векторы

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0}), (\mathbf{e}_2, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0}), ..., (\mathbf{e}_n, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0}), \\ (\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0}), (\mathbf{0}, \mathbf{e}_2, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0}), ..., \\ (\mathbf{0}, \mathbf{e}_n, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0}), ..., (\mathbf{0}, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0}, \mathbf{e}_1), \\ (\mathbf{0}, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0}, \mathbf{e}_2), ..., (\mathbf{0}, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0}, \mathbf{e}_n). \quad (6)$$

Действительно, эти s-векторы различны и линейно независимы. Если записать линейную комбинацию (3) этих s-векторов (6), то s-вектор $(\mathbf{f}_i)$, являющийся их линейной комбинацией на каждом из p мест будет иметь линейную комбинацию векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$. Если $(\mathbf{f}_i)=(\mathbf{0}_i)$ и (6) — линейно зависимые s-векторы, то среди коэффициентов при s-векторах есть не равные нулю. Тогда на каком-то из p мест получим нетривиальную линейную комбинацию векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$, равную нулю. Это невозможно, поскольку $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ — базис V_n. Кроме того, любой s-вектор является линейной комбинацией s-векторов (6), что следует из (5), т.е. s-векторы (6) — базис S_n^p.

В базисе S_n^p количество s-векторов (6) равно pn, так как, если считать s-векторы с базисным вектором на первом месте первой строкой, на втором месте — второй строкой и так далее, то p-й строкой будут s-векторы с базисным вектором на p-м месте. Таких строк будет p, а в каждой строке n s-векторов. Таким образом, s-векторы (6) — базис векторного пространства S_n^p и размерность этого пространства равна pn.

Разложение любого s-вектора $(\mathbf{a}_i)$ по векторам базиса (6) приведено во второй части формулы (5), которую можно записать короче $(\mathbf{a}_i)=a_1^i(\mathbf{e}_i, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0})+a_2^i(\mathbf{0}, \mathbf{e}_i, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0})+...+a_p^i(\mathbf{0}, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0}, \mathbf{e}_i)$, при этом $a_1^i(\mathbf{e}_i, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0})=a_1^1(\mathbf{e}_1, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0})+a_1^2(\mathbf{e}_2, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0})+...+a_1^n(\mathbf{e}_n, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0})$, т.е. каждое слагаемое является суммой по верхнему и нижнему индексам (i=1, 2, ..., n). Координаты s-вектора в базисе пространства S_n^p: a_1^1; a_1^2; ... ; a_1^n; a_2^1; a_2^2; ... ; a_2^n; ... ; a_p^1; a_p^2; ...; a_p^n. Всего pn координат.

Векторные пространства, имеющие равные размерности изоморфны [2]. Между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, и они являются моделями друг друга [3]. Например, V_4 и S_2^2, V_6 и S_3^2, ..., V_{pn} и S_n^p.

Соответствие $S_n^p \leftrightarrow V_{pn}$ можно установить векторами базиса. Тогда соответствующие s-вектор и вектор будут иметь равные координаты в базисах S_n^p и V_{pn}. Пусть в V_{pn} базисными являются векторы $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, ..., $\mathbf{q}_{pn}$. Тогда им соответствуют s-векторы из (6) $\mathbf{q}_1 \leftrightarrow (\mathbf{e}_1, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0})$, $\mathbf{q}_2 \leftrightarrow (\mathbf{e}_2, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0})$, ..., $\mathbf{q}_{pn} \leftrightarrow (\mathbf{0}, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0}, \mathbf{e}_n)$. Первая координата s-вектора (a_i) в базисе (6) равна a_1^1, вторая — a_1^2, ..., последняя — a_p^n. Такие же координаты будут у соответствующего вектора $\mathbf{a}$ в V_{pn} при базисных векторах $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, ..., $\mathbf{q}_{pn}$.

При таком подходе для пространств, размерность которых является простым числом, найти сразу соответствующее S пространство не удастся. В этом случае можно на векторы, входящие в систему, накладывать условия, что приведет к понижению размерности S_n^p и позволит получить s-модель пространства. Условия могут быть различными, например, равенство нулю каких-либо координат или наличие линейной зависимости между векторами, входящими в систему векторов. Модель V_5 можно получить из модели V_6. Пространству V_6 соответствует S_3^2. Если координата $a_2^3=0$ для всех пар векторов, то моделью V_5 будет множество пар векторов, у которых $a_2^3=0$. При этом в V_6 берется V_5, у которого координата любого вектора по $\mathbf{q}_6$ равна 0. Можно заведомо брать пространства большей размерности и вводя условия получать новые модели пространств.

При переходе к аффинному пространству An пространством переносов будет векторное пространство V_n. Возьмем в A_n некоторую точку O. Каждому вектору $\mathbf{a}$ из V_n будет соответствовать единственная точка A, такая, что OA=a. Тогда s-вектору $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_p)$ из S_n^p будут соответствовать точки B_1, B_2, ..., B_p, такие, что $\mathbf{OB}_1=\mathbf{a}_1$, $\mathbf{OB}_2=\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{OB}_p=\mathbf{a}_p$. Эти p точек в A_n соответствуют точке в пространстве A_{pn}, для которого пространством переносов будет V_{pn}. Поскольку аффинными координатами точки являются коэффициенты разложения ее радиус-вектора в базисе ассоциированного пространства V_n, то соответствие, установленное между S_n^p и V_{pn}, остается в силе.

Множество A_n^p, элементом которого являются p точек в A_n, будет моделью аффинного пространства A_p^n, поскольку между их элементами установлено взаимно однозначное соответствие. Множество A_n^p является аффинным пространством. Покажем, что аксиомы аффинного пространства справедливы. При этом паре «точек» $(A_1, A_2, ..., A_p)$ и $(B_2, B_2, ..., B_p)$ ставится в соответствие s-вектор $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_p)$ так, что $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1=\mathbf{a}_1$, $\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2=\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{A}_p\mathbf{B}_p=\mathbf{a}_p$.

Первая аксиома: для любой «точки» $(A_1, A_2, ..., A_p)$ и любого s-вектора $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_p)$ существует единственная «точка» $(B_1, B_2, ..., B_p)$ такая, что $(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1, \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2, ..., \mathbf{A}_p\mathbf{B}_p)=(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_p)$. Поскольку «точки» берутся в аффинном пространстве A_n, то для каждой точки, входящей в набор из p-точек, и каждого вектора, входящего в s-вектор аксиома справедлива, значит, справедлива для точек и всех векторов, входящих в рассматриваемые наборы. Вторая аксиома: для трех «точек» $(A_1, A_2, ..., A_p)$, $(B_2, B_2, ..., B_p)$, $(C_1, C_2, ..., C_p)$ справедливо $(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1, \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2, ..., \mathbf{A}_p\mathbf{B}_p)+(\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1, \mathbf{B}_2\mathbf{C}_2, ..., \mathbf{B}_p\mathbf{C}_p) = (\mathbf{A}_1\mathbf{C}_1, \mathbf{A}_2\mathbf{C}_2, ..., \mathbf{A}_p\mathbf{C}_p)$. На основе правила сложения s-векторов и того, что A_n — аффинное пространство эта аксиома справедлива, поскольку она справедлива по каждому месту s-векторов.

Таким образом, устанавливается соответствие между двумя аффинными пространствами. Тогда A_n^p можно считать аффинной моделью A_{pn}, поскольку с точки зрения теории аффинных пространств они неразличимы. Примеры аффинных моделей A_4: на прямой (A_1) — множество четверок точек $(A_4 \leftrightarrow A_1^4)$; на плоскости (A_2) — множество любых пар точек $(A_4 \leftrightarrow A_2^2)$; на плоскости (A_2) — множество четверок точек, расположенных по две на данных пересекающихся прямых $(A_8 \leftrightarrow A_2^4$, при этом $a_1^1=a_1^2=c_1$, $a_3^1=a_4^1=c_2$ и c_1, c_2 — заданные постоянные числа); на плоскости (A_2) — множество троек точек, расположенных на параллельных прямых с заданным направлением $(A_6 \leftrightarrow A_2^3$, при этом $a_1^1=a_1^2=a_3^1=k$ и величина k — параметр). Параллельные прямые в этом случае имеют направляющий вектор $\mathbf{e}_2$. Эта модель является аффинной основой чертежа Радищева.

Для инженерной геометрии особое значение имеют модели A_2^p, которые используются в многомерной начертательной геометрии. При решении прикладных задач необходимы и другие модели многомерного пространства, построенные в пространствах меньшей (или большей) размерности, которые можно получить на основе системы векторов.

Библиографический список

1. Куликов, Л. К. Системы векторов / Л. К. Куликов // Геометрическое моделирование в практике решения геометрических задач : межвуз. темат. сб. науч. тр. — Омск, 1991. — С. 39—42.

2. Мышкис, А. Д. Лекции по высшей математике / А. Д. Мышкис. — М. : Наука, 1969. — 640 с.

3. Волков, В. Я. Геометрическое моделирование в курсе начертательной геометрии : учеб. пособие / В. Я. Волков, Л. К. Куликов. — Омск : ОмГТУ, 1995. — 58 с.

КУЛИКОВ Леонид Константинович, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры «Инженерная геометрия и САПР».
Адрес для переписки: 644050, г. Омск, пр. Мира, 11.

Статья поступила в редакцию 25.04.2012 г.