

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 625.855.3

А. М. ЗАВЬЯЛОВ
Е. А. БЕДРИН
М. А. ЗАВЬЯЛОВ

Сибирская государственная
автомобильно-дорожная академия,
г. Омск

ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРУГЛОГОДИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ПО ГЛУБИНЕ СЕЗОННООТТАИВАЮЩЕГО СЛОЯ ГРУНТА И ВЕЧНОМЁРЗЛОЙ ТОЛЩИ ПОРОД

Приводится графоаналитический метод определения температуры сезоннооттаивающего слоя грунта и вечномёрзлой толщи пород в произвольной точке и любой момент времени.

Ключевые слова: нулевая годовая амплитуда температуры, температурное поле, сезоннооттаивающий слой грунта, вечномёрзлая толща пород, графоаналитический метод.

Введение. Известна [1] принципиальная схема закономерности распределения значений температуры по глубине сезоннооттаивающего слоя грунта и вечномёрзлой толщи пород (рис. 1). Однако количественный анализ указанной закономерности распределения, причём не только по метрическим параметрам, но и по времени, возможен только посредством построения температурного поля рас-

сматриваемого объекта. Предложенный графоаналитический метод как раз и позволяет построить температурное поле сезоннооттаивающего слоя грунта и вечномёрзлой толщи пород, не прибегая к использованию подчас громоздкого математического аппарата и, как правило, численным способам решения дифференциальных уравнений [2, 3]. Графоаналитический метод даёт возможность с мень-

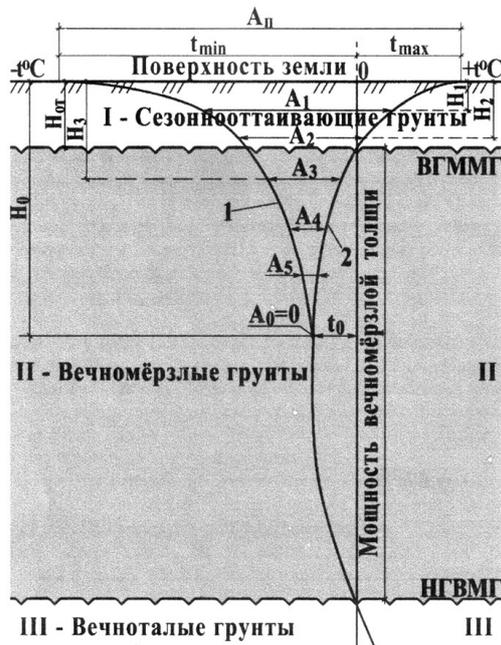


Рис. 1. Изменение температуры по глубине сезоннооттаивающего слоя грунта и вечномерзлой толщи пород [1]:
1, 2 – распределение температуры по глубине при минимальной и максимальной температуре поверхности, соответственно (здесь температура T обозначена как t)

шими затратами определять и прогнозировать температурные изменения как по глубине слоя грунта и толщи пород, так и по времени.

Основная часть. Идея метода заключается в следующем. Исходя из принципиальной схемы закономерности распределения значений температуры по глубине сезоннооттаивающего слоя грунта и вечномерзлой толщи пород, температурное поле интерпретируется аналитическими выражениями и их графиками:

— для периода оттаивания — степенной функцией второго порядка

$$T = a(x - H_A)^2 + T_A, \quad (1)$$

где $x \in [0, H_{от}]$; $H_{от}$ — нижняя граница вечномерзлой толщи;

— для периода промерзания — степенной функцией третьего порядка

$$T = b(x - H_A)^3 + T_A, \quad (2)$$

где $x \in [0, H_A]$; a и b — коэффициенты, определяемые из начальных условий; T_A и H_A — температура и глубина, соответственно, для уровня нулевой годовой температурной амплитуды $A = 0$ (рис. 1). Значения T_A и H_A являются ключевыми параметрами для задания аппроксимирующих функций (1) и (2).

Выбор порядка аппроксимирующих степенных функций обусловлен характером распределения температуры по глубине слоя грунта и толщи пород.

Следует также заметить, что, наряду с параметрами T_A и H_A , важнейшим параметром при моделировании температурного поля $T(x, t)$ является среднее значение температур в рассматриваемый i -й период времени $T_{cp,i}$.

Переходя к реализации идеи графоаналитического метода, рассмотрим выражение (1). Температура при $x = 0$, то есть на поверхности слоя грунта, может принимать различные значения в диапазоне от T_{min} до T_{max} . Иначе говоря,

$$T_{cp,i} \in [T_{min}, T_{max}], \quad (3)$$

здесь $T = T_{cp,i}$.

Полагая, что температура равна среднему значению температуры в i -й момент времени, устанавливаем дискретную функциональную связь между величинами температуры и времени

$$T = T_{cp,i}(t), \quad (4)$$

где t — время.

Подставляя в выражение (1) $x = 0$, $T = T_{cp,i}$, получаем

$$T_{cp,i} = aH_A^2 + T_A. \quad (5)$$

Откуда определяем коэффициент a

$$a = \frac{T_{cp,i} - T_A}{H_A^2}. \quad (6)$$

С учётом формулы (6) выражение (1) приобретает следующий вид:

$$T = \frac{T_{cp,i} - T_A}{H_A^2} (x - H_A)^2 + T_A. \quad (7)$$

Рассматривая выражение (2) и аналогично рассуждая, получим

$$b = \frac{T_{cp,i} - T_A}{H_A^3}. \quad (8)$$

Тогда выражение (2) на отрезке $x \in [0, H_A]$ можно представить в виде

$$T = \frac{T_{cp,i} - T_A}{H_A^3} (x - H_A)^3 + T_A. \quad (9)$$

Заметим, что областью определения формулы (7) является отрезок $[0, H_{от}]$, а областью значений отрезок $[T_A, T_{max}]$, что соответствует периоду оттаивания.

Для формулы (9) областями определения и значений соответственно будут $[0, H_A]$ и $[T_A, T_{min}]$, указанные температуры соответствуют периоду промерзания. При $T = 0$, а это значение температуры принадлежит области значений формулы (7), получим, что

$$H_{от} = -\sqrt{-\frac{T_A H_A^2}{T_{cp,i} - T_A}} + H_A; \quad (10)$$

$$H_{вм} = \sqrt{-\frac{T_A H_A^2}{T_{cp,i} - T_A}} + H_A, \quad (11)$$

поскольку значение температуры на верхней и нижней границах вечномерзлых грунтов (пород) близко к нулю (рис. 1).

Из формулы (7) следует также, что уравнение линии 2 (рис. 1), интерпретирующее распределение температуры по глубине, при максимальном значении температуры поверхности грунта можно записать:

$$T = \frac{T_{max} - T_A}{H_A^2} (x - H_A)^2 + T_A. \quad (12)$$

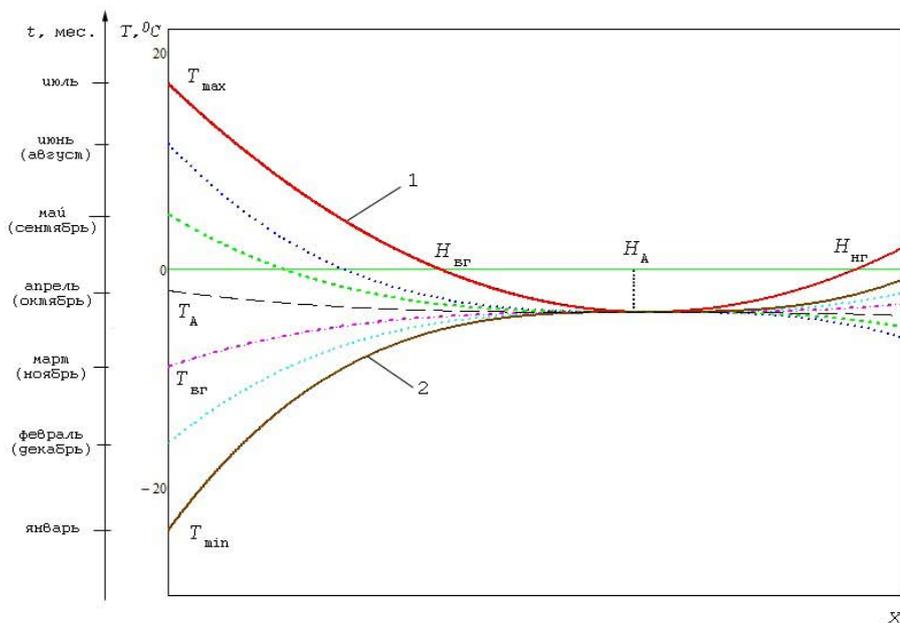


Рис. 2. Номограмма температурного поля сезоннооттаивающего слоя грунта и вечномерзлой толщи пород: 1 — летний период; 2 — зимний период; T_A — температура верхней границы многолетнемерзлых грунтов

Аналогично, из формулы (9), получаем уравнение распределения температуры по глубине при минимальной температуре поверхности грунта (линия 1, рис. 1)

$$T = \frac{T_{\min} - T_A}{H_A^3} (x - H_A)^3 + T_A. \quad (13)$$

На рис. 2 представлена графическая иллюстрация описываемого метода: слева, кроме оси температур, указана ось времени. Фактически, это графическое представление можно рассматривать как номограмму для получения значений параметров температурного поля $T(x, t)$.

Действительно, задаваясь значением средней температуры в интересующий момент времени (среднесуточной, среднемесячной), с учётом времени года (оттаивание или промерзание), и воспользовавшись либо графической иллюстрацией (рис. 2), либо формулами (7) или (9), получаем соответственно графическим или аналитическим способом значение температуры для любого значения величины x , то есть по любой глубине грунтовой толщи.

Пример. Исходные данные: $t_i = 14/05$; $T_{\max} = 5$ град, С; $T_A = -2$ град, С; $H_A = 6$ м.

$$\text{Тогда } T = \frac{5 - (-2)}{36} (x - 6)^2 + (-2),$$

$$\text{откуда следует, что } T = \frac{7}{36} (x - 6)^2 - 2,$$

это линия, задающая температурное поле $T(x, t)$ по глубине x для периода времени t_i , соответствующего дате 14 мая. Так, для глубины $x = 5$ м, определим значение температуры

$$T(5; 14/05) = \frac{7}{36} (5 - 6)^2 - 2 = -1 \frac{29}{36} = -1,81 \text{ град, С.}$$

Иначе говоря, исходя из среднего значения температуры, соответствующей дате 14 мая, на глубине

пяти метров ($x = 5$ м), температура грунта (породы) будет равна $-1,81$ град, С.

Таким образом, разработан графоаналитический метод определения температуры сезоннооттаивающего слоя грунта и вечномерзлой толщи пород в произвольной точке, и любой момент времени, для реализации которого не требуется прибегать к численному моделированию дифференциальных уравнений в частных производных.

Библиографический список

1. Давыдов, В. А. Изыскания и проектирование автомобильных дорог на многолетнемерзлых грунтах : учеб. пособие / В. А. Давыдов, Э. Д. Бондарева ; под ред. В. А. Давыдова. — Омск : Изд-во ОГПИ, 1989. — 183 с.
2. Моделирование температурного поля массива многолетнемерзлых грунтов / А. М. Завьялов [и др.] // Вестник СибАДИ. — 2010. — № 3 (17). — С. 49–52.
3. Завьялов, А. М. Аппарат математического моделирования процессов промерзания — протаивания грунтов / А. М. Завьялов, Е. А. Бедрин, М. А. Завьялов // Омский научный вестник. — 2010. — № 3(93). — С. 17–21.

ЗАВЬЯЛОВ Александр Михайлович, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры высшей математики, заслуженный работник высшей школы РФ.

БЕДРИН Евгений Андреевич, кандидат технических наук, доцент (Россия), докторант кафедры экономики и управления дорожным хозяйством.

ЗАВЬЯЛОВ Михаил Александрович, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры высшей математики.

Адрес для переписки: e-mail: gramota47@yahoo.com

Статья поступила в редакцию 02.07.2012 г.

© А. М. Завьялов, Е. А. Бедрин, М. А. Завьялов

ПРОБЛЕМЫ ГЕНЕРАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ФРАКТАЛЬНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Вскрываются специфические проблемы генерации случайных величин, описываемых распределениями с тяжелыми хвостами. Обосновывается необходимость использования для их генерации многозарядных ЭВМ.

Ключевые слова: случайные числа, системы с очередями, моделирование.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 12-07-00149-а.

Введение. Фрактальные, т.е. степенные или асимптотически-степенные [1] распределения — это распределения с тяжелыми хвостами (РТХ). В книге [2] в числе перспективных моделей теории массового обслуживания упоминаются «модели с «тяжелыми хвостами» распределений, характеризующих входящий поток и процесс обслуживания».

В настоящей статье рассматриваются специфические проблемы имитационного моделирования (ИМ) систем с очередями, обусловленные необходимостью генерации случайных величин (сл.в.) с РТХ.

Проблема корректной реализации фрактальных распределений. При ИМ реализация фрактальных распределений сопряжена со специфическими трудностями вычислительного характера. Поясним их на примере распределения Парето $Pa(K, \alpha)$, описываемого плотностью вероятностей (п.в.)

$$f(t) = \frac{\alpha K^\alpha}{t^{\alpha+1}}, \quad \alpha > 0, \quad t \geq K, \quad (1)$$

где α — параметр формы, $K > 0$ — минимум случайной величины x (масштабный параметр). Соответствующая функция распределения (ф.р.) имеет вид:

$$F(t) = 1 - (K/t)^\alpha, \quad t \geq K. \quad (2)$$

Из (1) k -й начальный момент распределения Парето (РП) находим в виде:

$$M(x^k) = \int_K^\infty t^k f(t) dt = \begin{cases} \frac{\alpha K^k}{\alpha - k}, & \alpha > k, \\ \infty, & \alpha \leq k, \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Отсюда при $\alpha > 1$ находим конечное среднее (м.о.) $M(x) = \alpha K / (\alpha - 1)$, при $\alpha > 2$ — конечную дисперсию $D(x) = M(x^2) - M^2(x) = \alpha K^2 / (\alpha - 1)^2 / (\alpha - 2)$.

Погрешности реализации математического ожидания РТХ. Особые свойства датчиков фрак-

тальных сл.в. обнаруживаются при их практическом использовании в ИМ. Например, в [3] описаны статистические эксперименты с генераторами паретовской сл.в. $x \in Pa(K, \alpha)$, и для некоторых α приведены результаты численного анализа свойств генерируемых величин. Эти эксперименты и численный анализ показывают, что конечная разрядность вещественных чисел ЭВМ приводит к необычайно высоким погрешностям реализации моментов сл.в. x . А эти погрешности, в свою очередь, приводят к серьезным ошибкам при ИМ очередей. Поэтому при разработке общих методов ИМ очередей важно исследовать погрешности реализации моментов РТХ.

Найдем погрешности реализации м.о. сл.в. $x \in Pa(K, \alpha)$ для всех $\alpha > 1$. Будем рассматривать сл.в. x как идеальную (математическую) сл.в., принадлежащую распределению $Pa(K, \alpha)$, и, соответственно, имеющую в точности все те свойства, которые им определяются, в частности — моменты (3). Величина, реализуемая компьютером, отличается от x , и мы обозначим ее через \hat{x} .

Точная формула генератора сл. в. $x \in Pa(K, \alpha)$ дается методом обращения функции (2) и имеет вид $x = K / \sqrt[\alpha]{1 - z}$, или, проще,

$$x = K / \sqrt[\alpha]{z}, \quad (4)$$

где $z \in R(0, 1)$ — базовая сл.в., (БСВ) — непрерывная, независимая, равномерно распределенная в промежутке $(0, 1)$ величина. На ЭВМ БСВ z представляется вещественной в компьютерном смысле, но дискретной в действительности псевдослучайной величиной \hat{z} , которая принимает равновероятно одно из значений, расположенных между 0 и 1 с малым шагом дискретизации ε . Так, в MS Excel $\varepsilon = 10^{-15}$, а в GPSS $\varepsilon = 10^{-6}$. Соответствующее формуле (4) преобразование БСВ \hat{z} дает дискретную сл.в. $\hat{x} = K / \sqrt[\alpha]{\hat{z}}$ (если при этом возможно значение $\hat{z} = 0$, то оно не используется).

Положим, $\hat{z} \in \{\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \dots, N\varepsilon\}$, где $N\varepsilon = 1$, и найдем м.о. $M(\hat{x}) = M(K / \sqrt[\alpha]{\hat{z}})$ при условии, что все значения $\hat{z}_i = i\varepsilon = iN^{-1}$ дискретной сл.в. \hat{z} равновероятны:

$$\begin{aligned}
 M(\hat{x}) &= \sum_{i=1}^N \hat{x}_i P(\hat{x}_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{K}{\sqrt[i]{\hat{z}_i}} = \\
 &= KN^{-1} \sum_{i=1}^N \hat{z}_i^{-\frac{1}{\alpha}} = KN^{-1} \sum_{i=1}^N (iN^{-1})^{-\frac{1}{\alpha}} = \\
 &= KN^{-1} \sum_{i=1}^N i^{-\frac{1}{\alpha}} N^{\frac{1}{\alpha}} = KN^{-\frac{1}{\alpha}} \sum_{i=1}^N i^{-\frac{1}{\alpha}} = \\
 &= KN^{p-1} \sum_{i=1}^N i^{-p} = KN^{p-1} S_N(p) \\
 & \quad (\alpha > 1, p = 1/\alpha, 0 < p < 1). \quad (5)
 \end{aligned}$$

Оценим сумму из (5) $S_N(p) = \sum_{i=1}^N i^{-p}$ снизу и сверху, используя интегралы:

$$\int_1^{N+1} t^{-p} dt < S_N(p) < 1^{-p} + \int_1^N t^{-p} dt, \quad (N > 1).$$

Вычисляя интегралы, получаем:

$$\frac{(N+1)^{1-p} - 1}{1-p} < S_N(p) < \frac{N^{1-p} - 1}{1-p}. \quad (6)$$

Выполняя здесь разложение функции $(N+1)^{1-p}$ в знакочередующийся ряд

$$(N+1)^{1-p} = N^{1-p} + (1-p)N^{-p} + \frac{(1-p)(-p)}{2!} N^{-p-1} + \dots \quad (7)$$

имеем:

$$(N+1)^{1-p} = N^{1-p} + (1-p)N^{-p} - R_2, \quad (8)$$

где $R_2 > 0$, и, как видно из (7), $R_2 < 0,5(1-p)pN^{-p-1}$. Таким образом, R_2 составляет в (8) менее N -й доли слагаемого $(1-p)N^{-p}$, которое, в свою очередь, составляет менее N й доли слагаемого N^{1-p} . Заметим, что нас интересуют значения $N \geq 10^6$. Подставляя (8) в (6), получаем оценку:

$$\frac{N^{1-p} - 1 - R_2}{1-p} + N^{-p} < S_N(p) < \frac{N^{1-p} - 1}{1-p}. \quad (9)$$

Наконец, умножая (9) на KN^{p-1} , получаем, с учетом (5), оценку для $M(\hat{x})$:

$$K \frac{1 - N^{p-1}(1+R_2)}{1-p} + KN^{-1} < M(\hat{x}) < K \frac{1 - pN^{p-1}}{1-p}. \quad (10)$$

Сравнение верхней оценки для $M(\hat{x})$ с $M(x) = Ka/(a-1) = K/(1-1/a) = K/(1-p)$ показывает, что м.о. $M(\hat{x})$ генерируемой сл.в. \hat{x} всегда меньше, чем $M(x)$. При этом коэффициент γ_M занижения м.о. составляет

$$\gamma_M = \frac{M(x)}{M(\hat{x})} > \frac{1}{1-pN^{p-1}}.$$

При всяком N , если $p \rightarrow 1$ ($\alpha \rightarrow 1$), то коэффициент $\gamma_M \rightarrow \infty$. Из (10) для абсолютной погрешности $\Delta_M = |M(\hat{x}) - M(x)| = K/(1-p) - M(\hat{x})$ находим:

$$K \frac{pN^{p-1}}{1-p} < \Delta_M < K \frac{N^{p-1}(1+R_2)}{1-p} - KN^{-1}. \quad (11)$$

Выполняя в (11) замену $p=1/\alpha$ и отбрасывая в правой части малое слагаемое R_2 и член с N^{-1} , получаем для Δ_M более простые асимптотические по N границы:

$$K \frac{N^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha-1} < \Delta_M < K \frac{\alpha N^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha-1}, \quad (12)$$

или, компактнее:

$$\frac{1}{\alpha} MN^{-\frac{K}{M}} < \Delta_M < MN^{-\frac{K}{M}}, \quad (13)$$

где $N \rightarrow \infty$, $M = M(x) = Ka/(a-1)$.

Как видно из (13), погрешность реализации м.о. паретовской сл.в., обусловленная дискретностью «вещественных» чисел в ЭВМ, с ростом N сходится к нулю (что естественно), но сходится она по асимптотически степенному закону (что в общем случае слишком медленно).

Рассмотрим, например, реализацию сл.в. x при $K=1$, $\alpha=1,1$ и $N=10^6$. Значение $M(x)$, согласно (3), в этом случае составляет $M(x) = \alpha K/(\alpha-1) = 11$. Однако его реализация в ЭВМ занижена на величину Δ_M . Из (13) находим, что эта величина лежит в пределах от 2,848 до 3,133, т.е. составляет около трех.

Точные расчеты, проведенные в следующем разделе статьи, показывают, что вместо м.о. 11 в рассмотренном случае реализуется м.о. 8,0297. При $\alpha = 1,05$ или $\alpha = 1,01$ отличия реализованных м.о. от истинных становятся многократными, и даже двойная точность вычислений (случай $N=10^{15}$) положения не спасает.

Числовые примеры. В качестве примеров в табл. 1 приведены значения погрешностей Δ_M и коэффициентов занижения γ_M при некоторых $\alpha \in (1, 2)$ и $K=1$. Значения $M(\hat{x})$ рассчитываются по формуле (5) через сумму $S_N(p)$. При $N \leq 10^6$ сумма $S_N(p)$ легко вычисляется на персональной ЭВМ непосредственно. При $N > 10^6$ непосредственное вычисление этой суммы затруднительно, и она рассчитывается как сумма двух частей:

$S_N(p) = \sum_{i=1}^m i^{-p} + \sum_{i=m+1}^N i^{-p}$, где $m=10^6$. Первая часть, т.е. сумма $\sum_{i=1}^m i^{-p}$, вычисляется непосредственно.

Вторая часть — сумма $\sum_{i=m+1}^N i^{-p}$ вычисляется как среднее арифметическое $(g+G)/2$ ее нижней g и верхней G оценок, где

$$\begin{aligned}
 g &= \int_{m+1}^{N+1} t^{-p} dt = \frac{(N+1)^{1-p} - (m+1)^{1-p}}{1-p}, \\
 G &= \int_m^N t^{-p} dt = \frac{N^{1-p} - m^{1-p}}{1-p}. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Такой расчет второй части суммы $S_N(p)$, как показывают численные проверки (выполненные для $0,01 \leq p \leq 0,99$), обеспечивает при $N > 10^6$ получение минимум семи точных значащих цифр. Так, при $m=10^6$, $N=10^{15}$, $p=0,8$ получаем $g=4920,75532$, $G=4920,75534$, $\sum_{i=m+1}^N i^{-p} = 4\,920,755\,33$.

Из табл. 1 видно, что даже при $N=10^{15}$ (т.е. при двойной точности вычислений) погрешности реализации паретовской сл.в. для цифровой ЭВМ фено-

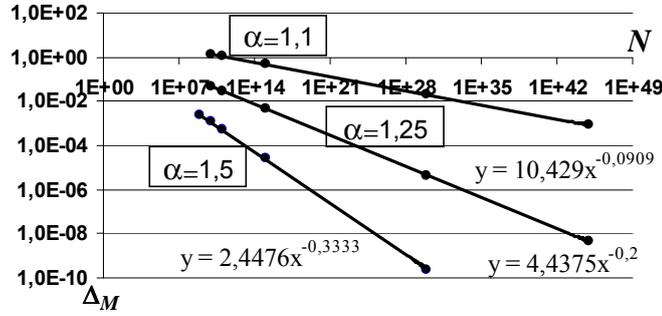


Рис. 1. Зависимость погрешностей Δ_M от N при различных $\alpha \in (1, 2)$

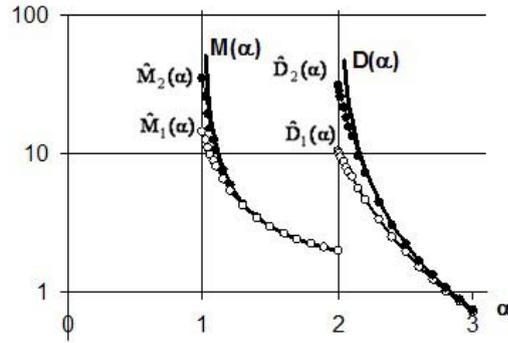


Рис. 2. Зависимости математических ожиданий и дисперсий от α

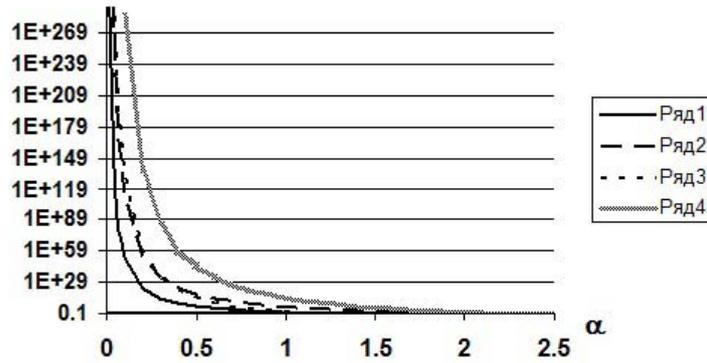


Рис. 3. Зависимости м.о. и дисперсий от α во всем диапазоне $\alpha > 0$.
Ряды 1, 2 – соответственно м.о. и дисперсия при $N = 10^6$,
Ряды 3, 4 – соответственно м.о. и дисперсия при $N = 10^{15}$

менально высоки, особенно при значениях α , приближающихся к единице.

Графики на рис. 1 представляют зависимость погрешностей Δ_M от N .

Полученные численными методами уравнения регрессии на рис. 1 степенные, достоверность аппроксимации R_2 максимальна (равна единице). Показатели степени и коэффициенты уравнений регрессии соответствуют аналитическому результату (13).

Погрешности реализации высших начальных моментов. Используя РП в качестве типичного представителя распределений со степенными и асимптотически-степенными хвостами, рассмотрим погрешности реализации его моментов порядка $k \geq 2$. У РП k -й начальный момент $\mu_k = M(x^k)$ при $\alpha \leq k$ бесконечен (3) и равен $aK^k/(\alpha - k)$ при $\alpha > k$. Для определения реализованного момента $\hat{\mu}_k = M(\hat{x}^k)$ по аналогии с формулой (5) получаем:

$$\hat{\mu}_k = M(\hat{x}^k) = \sum_{i=1}^N \hat{x}_i^k P(\hat{x}_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{K}{\sqrt{\hat{z}_i}} \right)^k =$$

$$\begin{aligned} &= K^k N^{-1} \sum_{i=1}^N \hat{z}_i^{-\frac{k}{\alpha}} = K^k N^{-1} \sum_{i=1}^N (iN^{-1})^{-\frac{k}{\alpha}} = \\ &= K^k N^{-1} \sum_{i=1}^N i^{-\frac{k}{\alpha}} N^{\frac{k}{\alpha}} = K^k N^{\frac{k}{\alpha}-1} \sum_{i=1}^N i^{-\frac{k}{\alpha}} = \\ &= K^k N^{p-1} \sum_{i=1}^N i^{-p} = K^k N^{p-1} S_N(p), \end{aligned} \quad (\alpha > k, p = k/\alpha, 0 < p < 1). \quad (15)$$

Чтобы найти границы для значений $\hat{\mu}_k$, достаточно умножить установленное для суммы $S_N(p)$ соотношение (9) на $K^k N^{p-1}$. Выполняя это, находим:

$$K^k \frac{1 - N^{p-1}(1+R_2)}{1-p} + K^k N^{-1} < \hat{\mu}_k < K^k \frac{1 - pN^{p-1}}{1-p}. \quad (16)$$

Сравнение верхней оценки для $\hat{\mu}_k$ с $\mu_k = aK^k/(\alpha - k) = K^k/(1 - k/\alpha) = K^k/(1 - p)$ показывает, что реализованный k -й момент $\hat{\mu}_k$ всегда меньше, чем μ_k . Из (16) по аналогии с (11), (12) вытекают асимптотические границы для абсолютной погрешности $\Delta\mu_k = K^k/(1-p) - \hat{\mu}_k$ реализации момента μ_k :

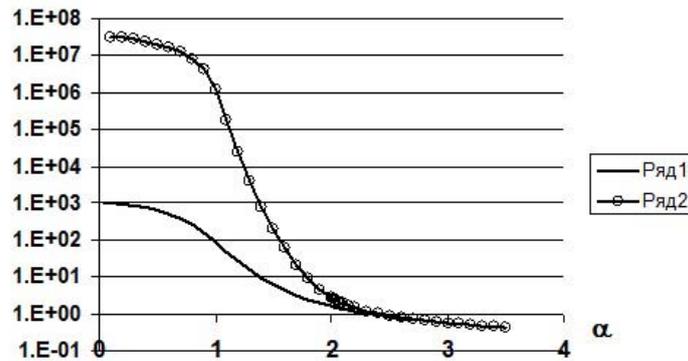


Рис. 4. Зависимости коэффициента вариации \hat{C} от α ; $\alpha > 0$.
Ряд 1 — при $N=10^6$, ряд 2 — при $N=10^{15}$

$$\frac{k}{\alpha} \mu_k N^{\frac{k}{\alpha}-1} < \Delta \mu_k < \mu_k N^{\frac{k}{\alpha}-1}. \quad (17)$$

Формула (13), найденная для $\mu_1 = M$, — это частный случай формулы для μ_k (17).

Соотношение (17) устанавливает факт асимптотически степенной сходимости к нулю погрешностей $\Delta \mu_k$ с ростом N , и точно определяет показатель степени $(k/\alpha - 1)$, характеризующий скорость сходимости.

Погрешности реализации дисперсии. Из (13) и (17) вытекает, что погрешность реализации дисперсии $D(x)$ паретовской сл.в. с ростом N также сходится к нулю лишь с асимптотически степенной скоростью. Действительно, поскольку дисперсия $D(x) = M(x^2) - M^2(x)$, а реализуется дисперсия $D(\hat{x}) = M(\hat{x}^2) - M^2(\hat{x})$, то погрешность реализации дисперсии составляет

$$\begin{aligned} \Delta_D &= D(x) - D(\hat{x}) = M(x^2) - M^2(x) - [M(\hat{x}^2) - M^2(\hat{x})] = \\ &= \mu_2 - \hat{\mu}_2 - [M^2(x) - M^2(\hat{x})] = \\ &= \Delta \mu_2 - [M(x) - M(\hat{x})] \cdot [M(x) + M(\hat{x})] = \\ &= \Delta \mu_2 - \Delta_M \cdot [M(x) + M(\hat{x})], \end{aligned} \quad (18)$$

$(\alpha > 2)$.

В последнем выражении обе величины $\Delta \mu_2$ и Δ_M сходятся к нулю со степенной скоростью, а сумма сходится к константе $2M(x)$. Отсюда следует, что сходимость к нулю погрешности Δ_D является асимптотически степенной.

Кроме того, в (18) в последнем выражении скорость сходимости к нулю для $\Delta \mu_2$ характеризуется показателем степени $(2/\alpha - 1)$, а для Δ_M — показателем $(1/\alpha - 1)$. Из этого вытекает, что скорость сходимости к нулю погрешности Δ_D характеризуется показателем $(2/\alpha - 1)$, который больше и определяет меньшую скорость сходимости, чем показатель $(1/\alpha - 1)$. Из этого вытекает также асимптотика $\Delta_D \rightarrow \Delta \mu_2$ при $N \rightarrow \infty$.

В табл. 2 приведены погрешности Δ_D и коэффициенты занижения дисперсии $\gamma_D = D(x)/D(\hat{x})$ для некоторых $\alpha \in (2, 3)$ при $K = 1$.

Расчитанные численными методами зависимости математических ожиданий и дисперсий от α представлены на рис. 2.

Сплошные линии на рисунке — это графики действительных моментов, линии с белыми маркерами — графики моментов, реализуемых при $N = 10^6$, и линии с черными маркерами — графики моментов, реализуемых при $N = 10^{15}$.

Реализация бесконечных м.о. и дисперсий. У паретовской сл.в. x при $\alpha \leq k$ момент $\mu_k = \infty$; моменты реализованной численно сл.в. \hat{x} при $\alpha \leq k$, естественно, конечные, и формула (15) позволяет их вычислить. Для таких вычислений можно воспользоваться и более простыми оценками (16). Однако еще более простые оценки (17) для случая $\alpha \leq k$ неприменимы, т.к. при их выводе использовалось соотношение (3), справедливое лишь при $\alpha > k$.

Вместе с тем очевидно, что абсолютная погрешность реализации моментов и коэффициенты их занижения при $\alpha \leq k$ бесконечны, поскольку при $\alpha \leq k$ вместо истинных бесконечных моментов реализуются моменты конечные.

Результаты вычисления моментов, реализуемых при $\alpha \leq k$, представлены графиками на рис. 3. Эти графики позволяют составить представление об изменении реализованных моментов во всем диапазоне значений α и при различных $\epsilon = N^{-1}$. Кроме того, поскольку при анализе очередей весьма важной характеристикой распределений является коэффициент вариации, то ниже представлены также и графики изменения его реализации $\hat{C} = \sqrt{D(\hat{x})}/M(\hat{x})$ (рис. 4). На основе соотношения (16) аналитическими методами (выводом аналогичного ему соотношения для коэффициента вариации и взятием соответствующего предела) можно показать, что при $\alpha \rightarrow 0$ коэффициент вариации \hat{C} сходится к \sqrt{N} . И на рис. 4 такую сходимость можно видеть.

Моделирование вычислительных сетей с фрактальным трафиком. Основной особенностью трафика современных телекоммуникационных сетей с коммутацией пакетов является его масштабная инвариантность (фрактальность), оказывающая существенное влияние на качество связи [4–6]. Исследования трафика концентрируются вокруг статистических характеристик очередей, поскольку буферизация сообщений рассматривается как основная обеспечивающая ресурсами стратегия. Эта область исследований характеризуется в [6] следующим образом: «В 1993 г. сенсацией в области моделирования характеристик сетей стал доклад, представленный специалистами из компании BellCore и Бостонского университета... Этот доклад под названием «О фрактальной природе трафика в Ethernet», по мнению некоторых специалистов, явился наиболее значительной работой по вычислительным сетям за последние десять лет. ...Результаты нового взгляда на природу сетевого трафика... означают, например, что целая область проектирования компьютерных

Таблица 1

Характеристики м.о. $M(\hat{x})$ с.в. \hat{x} ,
реализующей с.в. $x \in Pa(1, \alpha)$

α	$M=M(x)$	$N=10^6$			$N=10^{15}$		
		$M(\hat{x})$	ΔM	γ_M	$M(\hat{x})$	Δ_M	γ_M
1,01	101	13,42	87,59	7,53	29,66	71,34	3,41
1,05	21	10,42	10,58	2,02	17,06	3,94	1,23
1,1	11	8,03	2,97	1,37	10,55	0,45	1,04
1,25	5	4,72	0,28	1,06	4,996	0,004	1,001
1,5	3	2,98	0,02	1,01	3	0,00002	1,000

Таблица 2

Характеристики дисперсии $D(\hat{x})$ с.в. \hat{x} ,
реализующей с.в. $x \in Pa(1, \alpha)$

α	$D(x)$	$N=10^6$			$N=10^{15}$		
		$D(\hat{x})$	Δ_D	γ_D	$D(\hat{x})$	Δ_D	γ_D
2,01	197,0	9,94	187,1	19,8	28,26	16,99	6,97
2,05	37,2	8,33	28,9	4,5	19,78	2,09	1,88
2,1	17,4	6,78	10,6	2,6	13,41	0,58	1,29
2,25	5,8	3,95	1,8	1,5	5,58	0,05	1,03
2,5	2,2	1,94	0,3	1,1	2,22	0,002	1,002

устройств — построение буферов и управление ими — нуждается в радикальном пересмотре.... Однако среди специалистов пока нет единого мнения о том, какие математические инструменты применимы и эффективны для его исследования и прогнозирования. Их разработка должна стать следующим важным шагом в этой области».

В нашей работе [7] предложен ускоренный метод расчета буферов для очередей в сетях с фрактальным трафиком, основанный на имитационном моделировании. Эксперименты с предложенным методом показывают его высокую эффективность. Однако вопросы точного воспроизведения фрактальных распределений, строгое решение которых необходимо для дальнейшей работы над методом, оставались до сих пор в основном лишь предметом экспериментальных исследований. Настоящая статья позволяет существенно продвинуться к точному теоретическому решению этих вопросов.

Заключение. В статье получены результаты, позволяющие находить точные ответы на вопросы о погрешностях реализации распределений с тяжелыми хвостами при имитационном моделировании

сетей с очередями. Те результаты, которые получены для распределения Парето, могут использоваться в имитационном моделировании непосредственно. Что касается других распределений с тяжелыми хвостами (и не только таких), то выполненное исследование может использоваться как непосредственное руководство, методика анализа точности, с которой они реализуются в имитационном моделировании.

Библиографический список

1. Мандельброт, Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. — М. : Институт компьютерных исследований, 2002. — 656 с.
2. Вишневецкий, В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В. М. Вишневецкий. — М. : Техносфера, 2003. — 512 с.
3. Задорожный, В. Н. Предпосылки создания фрактальной теории массового обслуживания / В. Н. Задорожный // Омский научный вестник. — 2010. — № 2(90). — С. 182–187.
4. Шелухин, О. И. Фрактальные процессы в телекоммуникациях / О. И. Шелухин, А. М. Тенякшев, А. В. Осин ; под ред. О. И. Шелухина. — М. : Радиотехника, 2003. — 480 с.
5. Столингс, В. Современные компьютерные сети / В. Столингс. — СПб. : Питер, 2003. — 784 с.
6. Stallings, William. Интернет и телекоммуникации / W. Stallings. [Электронный ресурс]. — URL: <http://my.online.ru/it/press/cwm/1997/world.htm> (Дата обращения: 13.03.2010).
7. Задорожный, В. Н. Моделирование и расчет буферов фрактальных СМО / В. Н. Задорожный, О. И. Кутозов // Имитационное моделирование. Теория и практика (ИММОД-2011) : материалы 5 й Всерос. конф. — СПб. : ЦТ СС, 2011. — Т. 1. — С. 156–161.

ЗАДОРЖНЫЙ Владимир Николаевич, доктор технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры «Автоматизированные системы обработки информации и управления» Омского государственного технического университета.

Адрес для переписки: e-mail: zwn@yandex.ru

КУТУЗОВ Олег Иванович, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры «Автоматизированные системы обработки информации и управления» Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина).

Адрес для переписки: e-mail: kutuzov-oleg@mail.ru

Статья поступила в редакцию 01.06.2012 г.

© В. Н. Задорожный, О. И. Кутозов

Книжная полка

51/ПЗЗ

Пирумов, У. Г. Численные методы: теория и практика : учеб. пособие для бакалавров вузов по направлению подгот. «Математика. Прикладная математика» / У. Г. Пирумов [и др.] ; Моск. авиац. ин-т, Нац. исслед. ун-т. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Юрайт, 2012. — 1 о=эл. опт. диск (CD-ROM). — ISBN 978-5-9916-1867-0.

Учебное пособие содержит все традиционные разделы, предусмотренные программой по данной дисциплине. Материал дается по единой схеме, включающей в себя постановку задачи, описание алгоритма решения, детально разобранные типовые примеры и тщательно подобранный комплекс задач для самостоятельного решения.

РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛЕЙ И МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ

В работе предложен подход для определения эффективных производственных связей между предприятиями, основанный на применении методов оптимизации. Представлены результаты апробации разработанных математических моделей для агропромышленного комплекса на примере данных одного из районов Омской области.

Ключевые слова: математическое моделирование, производственное обслуживание, схема взаимодействия, целочисленное линейное программирование.

Введение. Отдельные направления деятельности предприятий характеризуются ограниченным и кратковременным сроком выполнения, отклонение от которого может привести к отрицательным последствиям не только для самого предприятия, но и для всей системы, в которой данный хозяйствующий субъект функционирует.

Для выполнения необходимых операций используются ресурсы, которых бывает недостаточно для завершения работ в требуемый период, либо, напротив, может быть избыточное количество. В таких условиях взаимовыгодное сотрудничество субъектов системы позволяет повысить результативность их деятельности, обеспечить эффективное использование ресурсов, сократить время выполнения работ, не допускать нарушения оптимальных сроков.

Процессы распределения ресурсов выполняются в различных сферах деятельности, среди них можно привести следующие примеры: финансовая взаимопомощь предприятий, входящих в холдинг (некоторые предприятия в холдинге нуждаются в незамедлительной финансовой поддержке от других предприятий холдинга); система производственного обслуживания в сфере аграрного производства, взаимодействие лесных хозяйств при тушении пожаров; формирование профессорского состава кафедр высших учебных заведений, распределение техники дорожных служб при уборке автомобильных дорог от снега (несвоевременность данной операции может привести к аварийным ситуациям на дорогах).

В сложившихся условиях выявление наиболее выгодных связей между предприятиями по распределению ограниченных ресурсов является актуальной задачей, которая может быть эффективно решена с использованием методов математического моделирования и оптимизации.

1. Постановка задачи. Пусть имеется конечное множество предприятий, каждому из которых необходимо выполнить заданное число работ различного объема за ограниченный период времени. Каждая работа характеризуется допустимым сроком выполнения, отклонение от которого влечет определенные экономические потери. Известно, что некоторые предприятия (клиенты) испытывают потребность в ресурсах и не могут закончить определенные виды работ самостоятельно в установленный срок, другие же предприятия (поставщики), напротив, имеют неиспользованные мощности, которые могут быть применены для выполнения работ (оказания услуг) клиентам. Заданы значения параметров размещения и функционирования предприятий. Требуется для системы предприятий найти такой вариант сотрудничества по оказанию производственных услуг, при котором финансовые потери, связанные с нарушением оптимальных сроков, суммарные затраты на потребление услуг и доставку ресурсов для клиентов будут минимальными.

Для решения данной задачи предварительно необходимо определить потенциальных клиентов и поставщиков услуг, т.е. установить потребности и возможности предприятий, учитывая при этом, что средствами выполнения работ могут выступать комбинации различных ресурсов, например, сельскохозяйственный агрегат; техническое устройство; сотрудник, владеющий определенными знаниями, команда экспертов, и т.п. Для нахождения производственных возможностей предприятий нами разработана модель целочисленного линейного программирования.

2. Модель максимизации производственных возможностей. Задача формулируется следующим образом: имеется некоторое множество предприятий, каждое из которых обладает заданным набором

Оптимальный марочный состав техники предприятий для выполнения работы вида «Боронование»

Агрегат / предприятие	КФХ Кузнецов	ООО Лидер	ООО Евгащинское	ООО Северное	СПК Уленкульский
K700 + 21БЗТС			2		
K700 + 4БИГ		1			
T150K + 18БЗТС		3	1		
MT312321 + 18БЗТС	1	5	9		1
MT380 + 18БЗТС			1	7	
MT380 + 15БЗТС		1			
MT380 + 12БЗТС	1		5		1

ресурсов. Известны условия сочетания ресурсов для получения средства выполнения определенной работы и величины производительности для каждой возможной комбинации ресурсов. Необходимо определить состав средств выполнения для каждого вида работ таким образом, чтобы обеспечить максимальную суммарную производительность предприятий [1, 2].

Введем следующие обозначения:

n — число предприятий, $P = \{1, \dots, n\}$; m — число вариантов комбинаций ресурсов, $I = \{1, \dots, m\}$; l — число ресурсов, $R = \{1, \dots, l\}$; a_i — производительность средства i ; h_{ir} — количество ресурсов вида r для составления средства i ; w_{pr} — количество ресурсов вида r на предприятии p ; d — допустимая длительность выполнения всего комплекса работ.

Переменные модели:

x_{ip} — количество средств для выполнения заданной работы, составленных по варианту i на предприятии p ;

y_p — суммарная производительность средств предприятия p для выполнения заданной работы.

Модель частично целочисленного линейного программирования:

$$\sum_{p=1}^n y_p \rightarrow \max \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^m x_{ip} h_{ir} \leq w_{pr}, \quad p \in P, \quad r \in R, \tag{2}$$

$$y_p = \sum_{i=1}^m 2x_{ip} a_i d, \quad p \in P, \tag{3}$$

$$x_{ip} \in Z^+, \quad i \in I, \quad p \in P, \tag{4}$$

$$y_p \geq 0, \quad p \in P. \tag{5}$$

Целевая функция (1) состоит в максимизации производительности предприятий. Ограничения (2) гарантируют составление средств выполнения работы только из ресурсов, имеющихся на предприятиях. Условия (3) позволяют определить суммарную производительность ресурсов для каждого предприятия.

3. Модель планирования оптимальных производственных связей. Для нахождения схемы эффективного взаимодействия предприятий введем следующие обозначения: n — число предприятий (поставщиков и потребителей), $I = \{1, \dots, n\}$; p — номер предприятия, $p \in I$; m — число видов работ (ус-

луг), $K = \{1, \dots, m\}$; r — число видов средств выполнения работ (оказания услуг), $T = \{1, \dots, r\}$.

Пусть I_k^1 — множество потенциальных поставщиков услуги k для сторонних предприятий, $I_k^1 \subseteq I$; I_k^2 — множество потребителей услуги k , $I_k^2 \subseteq I$.

Известны значения следующих параметров:

b_{pk} — объем работы k на предприятии p ; d_k — директивный срок выполнения работы k ; c_{ik} — стоимость выполнения одной единицы услуги вида k поставщиком i ($i \in I_k^1$); w_{ij} — расстояние от предприятия i до потребителя j (км); ε — цена доставки средств оказания услуги; h_k — усредненная величина финансовых потерь при отклонении от разрешенного срока для работы k ; β_{jk} — величина допустимых затрат для предприятия j на транспортировку средств при выполнении работы k ; δ_j — величина допустимых затрат на потребление услуг и доставку техники в течение всего периода производства для клиента j .

Величины, определяемые на основании исходных данных:

U_{pk} — суммарная производительность предприятия p при выполнении работы k за период времени d_k ; S_{jk} — потребности клиента j в услуге вида k ; Q_{ik} — возможности поставщика i при оказании услуги вида k . Величина U_{pk} находится в результате решения модели максимизации производственных возможностей предприятий (1) – (5).

Если $U_{pk} > b_{pk}$, то предприятие p выступает потенциальным поставщиком услуги вида k ($p \in I_k^1$); если $U_{pk} < b_{pk}$, тогда предприятие p — потребитель услуги вида k ($p \in I_k^2$); если $U_{pk} = b_{pk}$, то предприятие p не является участником системы при выполнении работы k . Потребности клиентов находятся по формуле:

$$S_{jk} = b_{jk} - U_{jk}, \quad j \in I_k^2, \quad k \in K. \tag{6}$$

Возможности поставщиков вычисляются по формуле:

$$Q_{ik} = U_{ik} - b_{ik}, \quad i \in I_k^1, \quad k \in K. \tag{7}$$

Введем переменные модели: x_{ijk} — объем работы k , выполняемый предприятием i для клиента j ($i \in I_k^1, j \in I_k^2, k \in K$); z_{ijk} — вспомогательная булева переменная, $z_{ijk} = 1$, если поставщик i выполняет потребителю j работу вида k (является активным), 0 — в противном случае ($i \in I_k^1, j \in I_k^2, k \in K$); y_{jk} — объем работы k , выполняемый в неоптимальные сроки.

Модель частично целочисленного линейного программирования, построенная для планирования схемы взаимодействия предприятий по выполнению всего комплекса заданных работ за планируемый период времени, имеет вид:

Таблица 2

**Оптимальный марочный состав техники предприятий
для выполнения работы вида «Боронование»**

Агрегат / предприятие	ООО Красноярское	ООО Новологиново	ЗАО Восход	ЗАО Ингалинское
K701 + 21БЗТС	1	4	2	
K700 + 21БЗТС	5	3		3
K700 + 5БИГ		1		
T150K + 18БЗТС	1			
T150 + 18БЗТС				4
MT312321 + 18БЗТС	3		2	
MT380 + 15БЗТС		1		1
MT380 + 12БЗТС		3		4

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m (c_{ik} x_{ijk} + y_{jk} h_k + 2\varepsilon w_{ij} z_{ijk}) \rightarrow \min \quad (8)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n x_{ijk} \leq Q_{ik}, \quad i \in I_k^1, \quad k \in K, \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ijk} + y_{jk} = S_{jk}, \quad j \in I_k^2, \quad k \in K, \quad (10)$$

$$x_{ijk} \leq M z_{ijk}, \quad i \in I_k^1, \quad j \in I_k^2, \quad k \in K, \quad (11)$$

$$2\varepsilon w_{ij} z_{ijk} \leq \beta_{jk}, \quad i \in I_k^1, \quad j \in I_k^2, \quad k \in K, \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m c_{ik} x_{ijk} + 2\varepsilon w_{ij} z_{ijk} \leq \delta, \quad j \in I_k^2, \quad (13)$$

$$x_{ijk} \geq 0, \quad i \in I_k^1, \quad j \in I_k^2, \quad k \in K, \quad (14)$$

$$z_{ijk} \in \{0,1\}, \quad i \in I_k^1, \quad j \in I_k^2, \quad k \in K. \quad (15)$$

Целевая функция (8) состоит в минимизации финансовых потерь, затрат на потребление услуг и доставку средств выполнения работ для клиентов. Ограничения (9) означают, что возможности любого поставщика не могут быть превышены для каждого вида услуг. Условия (10) отражают требование удовлетворения потребностей любого клиента по каждому виду услуг. Ограничения (11) гарантируют, что услуги будут оказываться только активными поставщиками. Условия (12) ограничивают удаленность поставщиков. Условия (13) устанавливают допустимую сумму затрат на потребление услуг и доставку средств предприятия за оптимальный период.

4. Апробация подхода для сферы аграрного производства (на примере одного из районов Омской области). Данная задача имеет особую актуальность для агропромышленного комплекса (АПК) России, поскольку устойчивому развитию сельского хозяйства и росту объемов производства препятствует недостаточная техническая оснащенность предприятий аграрного сектора. Пополнение машинно-тракторного парка у большинства товаропроизводителей уступает темпам списания устаревшей техники вследствие ограниченности финансовых средств на ее приобретение.

Поскольку результативность сельскохозяйственного производства зависит от системы его об-

служивания, определяющей более половины всех издержек, то в современных условиях приобретают актуальность вопросы повышения эффективности использования имеющейся техники. Данная проблема может быть решена на основе построения системы взаимовыгодного сотрудничества сельскохозяйственных предприятий.

Различные аспекты развития рынка производственных услуг агропромышленного комплекса (АПК) рассматривались в трудах отечественных и зарубежных авторов. Значительное число работ посвящено изучению организационно-экономических, правовых сторон данной проблемы, таких как формирование региональных рыночных систем производственного обслуживания; обоснование производственных мощностей по зонам с учетом рационального распределения объемов полевых, ремонтных и транспортных работ; осуществление мониторинга потребностей товаропроизводителей в услугах; развитие конкретных направлений услуг в АПК (материально-техническое обеспечение, создание МТС, агрохимическое и транспортное обслуживание, лизинг, ремонт техники и другие) [3, 4, 5].

В настоящее время эффективному сотрудничеству предприятий сферы АПК препятствуют следующие факторы: нехватка информации о рынке про-

**Таблица 3
Возможности предприятий
по оказанию производственной услуги
«Боронование»**

Предприятие	Производительность за допустимый агротехнический срок, га
КФХ Боченков	0
КФХ Савенко	0
КФХ Кузнецов	2820
КФХ Порядин	0
ООО Лидер	17240
ООО Евгашинское	28480
ООО Северное	9380
ООО Мегapolis-Д	0
КФХ Вяткина Т.М.	0
СПК Уленкульский	2820
ООО Красноярское	19420
КФХ Каурцева Е.А.	0
ООО Новологиново	20650
ЗАО Восход	7880
ЗАО Ингалинское	18280

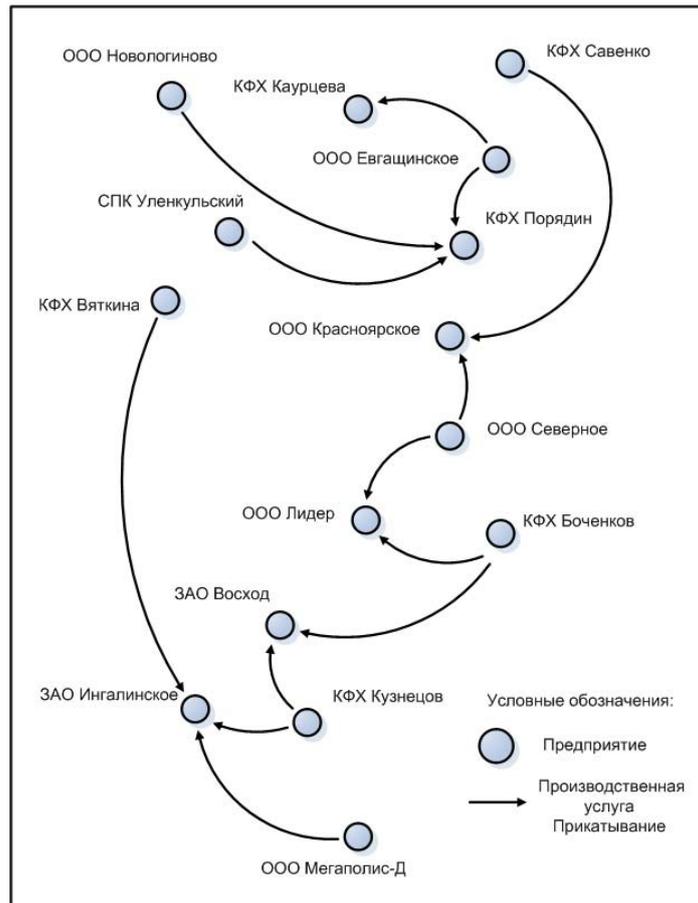


Рис. 1. Схема взаимодействия предприятий по оказанию производственной услуги «Прикатывание почвы»

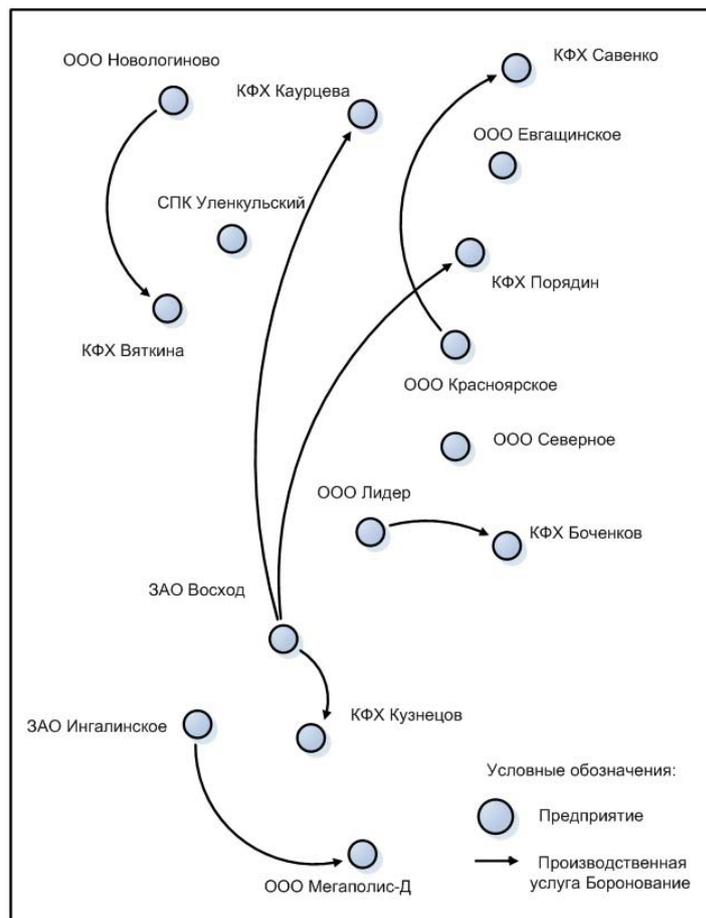


Рис. 2. Схема взаимодействия предприятий по оказанию производственной услуги «Боронование»

изводственного обслуживания, его конъюнктуре, отсутствие инструментов прогнозирования спроса и предложения.

Апробация построенных математических моделей для сферы АПК выполнена на примере одного из районов Омской области. Проведен вычислительный эксперимент, позволивший получить схему сотрудничества для 15 предприятий по оказанию восьми видов производственных услуг (вспашка, боронование, прикатывание почвы, посев, культивация, боронование по всходам, прикатывание посевов, уборка урожая) на основе выбранного критерия.

Результаты расчета модели максимизации производительности предприятий по виду работ «Боронование» представлены в табл. 1–3.

Полученные схемы производственных связей предприятий для услуг «Боронование», «Прикатывание почвы» приведены на рис. 1, 2.

Расчеты показали, что разработанный подход перспективен для определения наиболее выгодных вариантов взаимодействия предприятий по оказанию-потреблению производственных услуг в условиях ограниченного срока выполнения работ.

Библиографический список

1. О решении одной задачи производственного обслуживания АПК / А. А. Колоколов [и др.] // Сборник научных трудов V Международной школы-симпозиума АМУР-2011. – Симферополь : ТНУ им. В. И. Вернадского, 2011. – 411 с.
2. Михаль, В. А. Повышение эффективности системы производственного обслуживания районного АПК с использованием моделей оптимизации / В. А. Михаль, Е. Я. Семерханова // Теоретические знания – в практические дела : сб. науч. ст. XII Межд. науч.-инновационной конф. – Омск : Филиал ГОУ ВПО «РосЗИТАП» в г. Омске, 2011. – С. 151–152.
3. Кормаков, Л. Ф. Техническое обеспечение сельскохозяйственного производства. Организационно-экономический

аспект / Л. Ф. Кормаков, Л. С. Орси́к. – М. : ФГНУ «Росинформротех», 2005. – 232 с.

4. Степанова, Т. Ю. Развитие рынка производственных услуг в АПК / Т. Ю. Степанова // Сибирская деревня: история, современное состояние, перспективы развития. – Омск, 2004. – № 3. – С. 125–127.

5. Стукач, В. Ф. Развитие регионального рынка производственных услуг в АПК / В. Ф. Стукач, Т. Ю. Степанова, Н. А. Храмова – Омск : ООО «Издательско-полиграфический центр «Сфера», 2004. – 180 с.

КОЛОКОЛОВ Александр Александрович, доктор физико-математических наук, профессор (Россия), заведующий лабораторией дискретной оптимизации Омского филиала Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Адрес для переписки: e-mail: kolo@ofim.oscsbras.ru

СТЕПАНОВА Татьяна Юрьевна, кандидат экономических наук, доцент (Россия), заведующая кафедрой информатики Омского государственного аграрного университета им. П. А. Столыпина.

Адрес для переписки: e-mail: stepanovatatyana@list.ru

СЕМЕРХАНОВА Елена Яковлевна, аспирантка кафедры «Математические методы и информационные технологии в экономике» Омского государственного технического университета.

Адрес для переписки: e-mail: semerkhanova@rambler.ru

МИХАЛЬ Виктор Александрович, аспирант лаборатории дискретной оптимизации Омского филиала Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Адрес для переписки: e-mail: msheul.san@gmail.com

Статья поступила в редакцию 13.02.2012 г.

© А. А. Колоколов, Т. Ю. Степанова, Е. Я. Семерханова, В. А. Михаль

Книжная полка

51/Ж86

Жуков, В. М. Практические занятия по математике: теория, задания, ответы / В. М. Жуков. – Ростов н/Д. : Феникс, 2012. – 343 с. – ISBN 978-5-222-17544-6.

Учебное пособие «Практические занятия по математике: теория, задания, ответы» выгодно отличается тем, что весь учебно-методический материал разделен на параграфы, каждый из которых соответствует одной теме учебной программы по математике, предлагаемой к проработке на практическом занятии. Каждый параграф содержит: краткую теорию, формулы, используемые на данном практическом занятии; задачи для решения на практическом занятии и для домашнего задания. Задачи для решения на практических занятиях расположены по возрастанию сложности и представляют интерес для студентов с различной математической подготовкой. Задачи для домашнего задания подобраны так, чтобы студент, выполняя его, мог закрепить и развить навыки, приобретенные на практическом занятии.

51/Ч-45

Червенчук, В. Д. Введение в дискретную математику и логику : учеб. пособие / В. Д. Червенчук, И. В. Червенчук. – М., 2011. – 258 с. – ISBN 978-5-91146-13-0.

Излагаются основы дискретной математики и языка логики предикатов на базе теоретико-множественной концепции с позиций математического платонизма с учетом современных требований, предъявляемых к изучению математических дисциплин в высшей школе. Излагаемый материал написан на основе лекционных курсов по дисциплинам «Вводный курс математики», «Основы дискретной математики», «Математическая логика» и «Теория алгоритмов», читаемых авторами в течение многих лет. В конце каждого раздела, для оценки понимания прочитанного, читателю задаются вопросы для самоконтроля. Пособие содержит примеры с решениями, проясняющими изучаемые понятия.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Для двумерной гиперболической системы с постоянными коэффициентами строится решение задачи Коши с гладкими финитными начальными данными в виде суперпозиции плоских волн, представляющих собой решения вспомогательных задач Коши для одномерных гиперболических систем, строящихся по исходной задаче и направлению на плоскости. Построение плоских волн проводится обобщенным методом Римана. Результат проиллюстрирован на примере двумерной системы уравнений акустики.

Ключевые слова: две пространственные переменные, суперпозиция плоских волн, матрицы Римана первого и второго рода, система уравнений акустики.

1. В работах [1, 2] распространен классический метод Римана для гиперболического уравнения второго порядка на гиперболические системы общего вида с одной пространственной переменной. Ядрами интегральной формулы для решения служат матрицы двух типов, получившие название матриц Римана первого и второго рода и представляющие собой сингулярную и регулярную компоненты фундаментальной матрицы гиперболической системы. В случае постоянных коэффициентов матрицы Римана эффективно вычисляются. В [3–7] аппарат матриц Римана получил приложение к анализу краевых задач для систем этого класса — задачи Коши, смешанной задачи, задачи Стефана. Подробному изложению этих результатов посвящена монография [8].

В последние годы в цикле работ [9–13] получено приложение этого аппарата к задаче теории управления — проблеме граничного управления решениями гиперболических уравнений.

В данной работе аппарат матриц Римана применен к подклассу краевых задач для гиперболических систем с несколькими пространственными переменными. Рассматривается задача Коши для гиперболической системы с двумя пространственными переменными с постоянными коэффициентами и гладкой финитной начальной вектор-функцией. Строится решение этой задачи в виде суперпозиции плоских волн, представляющих собой решения вспомогательных одномерных гиперболических систем. Результат проиллюстрирован на примере двумерной системы уравнений акустики.

2. Приведем для удобства ссылок используемые далее сведения из работы [2] (см. также [8]). Рассмотрим гиперболический оператор

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial}{\partial t}u + A \frac{\partial}{\partial s}u + B, \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

Здесь A, B — постоянные матрицы порядка N ,

$$A = Z \operatorname{diag}(a_1 I_1, \dots, a_n I_n) Z^{-1}, \quad a_1 > \dots > a_n, \quad (2)$$

I_k — единичная матрица порядка N_k . Проведем через точку $(0, 0)$ характеристики $s = a_k t$, $k = 1, \dots, n$, и пусть

ℓ_k^+, ℓ_k^- — верхняя ($t \geq 0$) и нижняя ($t \leq 0$) часть характеристики $s = a_k t$, Y_j — объединение открытых углов $(\ell_j^+, \ell_{j+1}^+), (\ell_j^-, \ell_{j+1}^-)$, $j = 0, \dots, n-1$, Y_0 — объединение открытых углов $(\ell_1^+, \ell_n^-), (\ell_1^-, \ell_n^+)$. Построим матрицы $U_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, $V(s, t)$ по формулам

$$U_k(t) = P_k \exp(P_k B P_k t),$$

$$P_k = Z \operatorname{diag}(0, \dots, 0, I_k, 0, \dots, 0) Z^{-1},$$

$$V(s, t) = \begin{cases} V_j, & (s, t) \in Y_j, \quad j = 1, \dots, n-1, \\ 0, & (s, t) \in Y_0. \end{cases}$$

$$V_j = \frac{(2\pi i)^{-2}}{a_j - a_{j+1}} \iint_{\gamma \times \gamma} \exp \left[\frac{\lambda}{a_j - a_{j+1}} (s - a_j t) + \frac{\mu}{a_j - a_{j+1}} (s - a_{j+1} t) \right] \Delta_j^{-1}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu,$$

где γ — окружность $|\gamma| = R$ достаточно большого радиуса, проходящая в положительном направлении,

$$\Delta_j = Z \operatorname{diag}(\lambda_1 I_1, \dots, \lambda_n I_n) Z^{-1} + B,$$

$$\lambda_k = \frac{(a_k - a_{j+1})\lambda + (a_j - a_k)\mu}{a_j - a_{j+1}}.$$

Матрицы U_k, V — матрицы Римана первого и второго рода гиперболического оператора (1) с постоянными коэффициентами [2].

ТЕОРЕМА 1 [2]. *Задача Коши*

$$\mathcal{L}u = 0, \quad u|_{t=0} = \eta(s)$$

с гладкой начальной функцией $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^N$ однозначно разрешима в классе гладких функций $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^N$. Решение дается формулой

$$u(s, t) = F\eta = \sum_{k=1}^n U_k \eta(s - a_k t) +$$

$$+ \int_{s-a_1 t}^{s-a_n t} V(s-\sigma, t) \eta(\sigma) d\sigma, \quad (3)$$

здесь U_k, V — матрицы Римана оператора \mathcal{L} .

3. Введем семейство ортов

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Рассмотрим двумерный гиперболический оператор

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + B, \\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Здесь A_k, B — постоянные матрицы порядка N , требование гиперболичности означает, что при любом $\varphi \in [0, 2\pi]$ матрица

$$A_\varphi = \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2$$

имеет вид (2), где в общем случае n, N_k, α_k зависят от φ . Построим семейство одномерных гиперболических операторов

$$L_\varphi = \frac{\partial}{\partial t} + A_\varphi \frac{\partial}{\partial s} + B, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

Матрицами Римана первого и второго рода оператора (4) будем называть матрицы Римана $U_k(t, \varphi), V(s, t, \varphi)$ семейства L_φ .

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} Lu = 0, & u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^N, \\ u|_{t=0} = h(x), & h \in C^4(\mathbb{R}^2) \text{ и финитна.} \end{cases} \quad (5)$$

Из требований на h вытекает оценка на норму преобразования Фурье \hat{h} :

$$|\hat{h}(\xi)| = O(|\xi|^{-4}) \quad (|\xi| \rightarrow \infty), \quad (6)$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. Представляя, с учетом этого, $h(x)$ интегралом Фурье

$$h(x) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} \hat{h}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

и переходя в двойном интеграле к полярным координатам: $\xi = r\omega$, получим

$$h(x) = \int_0^{2\pi} h_\varphi(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2) d\varphi, \quad (7)$$

где

$$h_\varphi(s) = (2\pi)^{-2} \int_0^\infty e^{irs} \hat{h}(r\omega) r dr. \quad (8)$$

Нетрудно получить, с учетом (6), что h_φ гладкая по s, φ .

Будем далее предполагать, что при каждом $\varphi \in [0, 2\pi]$ собственные числа $\alpha_{k\varphi}$ матрицы A_φ различны:

$$A_\varphi = Z_\varphi \text{diag}(\alpha_{1\varphi}, \dots, \alpha_{N\varphi}) Z_\varphi^{-1}, \quad \alpha_{1\varphi} > \dots > \alpha_{N\varphi}. \quad (9)$$

В этом случае $\alpha_{k\varphi}$ и матрица Z_φ непрерывно зависят от φ , тем самым в силу формул п. 2 матрицы $U_k(t, \varphi), V(s, t, \varphi)$ непрерывно зависят от φ . Обозначим $u_\varphi(s, t)$ решение задачи Коши

$$L_\varphi u = 0, \quad u|_{t=0} = h_\varphi(s), \quad (10)$$

где h_φ — функция (8). Формула (3) дает:

$$u_\varphi(s, t) = \sum_{k=1}^N U_k(t, \varphi) h_\varphi(s - \alpha_{k\varphi} t) + \\ s - t a_{N\varphi} + \int_{s - t a_{1\varphi}} V(s - \sigma, t, \varphi) d\sigma. \quad (11)$$

Нетрудно усмотреть: функция (11) непрерывна по φ и гладкая по s, t .

ТЕОРЕМА 2. При условии (9) функция

$$u(x, t) = \int_0^{2\pi} u_\varphi(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2, t) d\varphi, \quad (12)$$

где u_φ строится по формулам (8), (11) — решение задачи Коши (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя (12) в (5), с учетом соотношений (7), (10) для h_φ и u_φ и равенств

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \omega_k \int_0^{2\pi} \frac{\partial u_\varphi}{\partial s} \Big|_{s=\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2} d\varphi, \quad k = 1, 2,$$

получим:

$$u(x, 0) = \int_0^{2\pi} h_\varphi(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2) d\varphi = h(x),$$

$$Lu = \int_0^{2\pi} L_\varphi u_\varphi \Big|_{s=\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2} d\varphi = 0,$$

что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ. Изложенная схема построения решения задачи Коши (5) может быть распространена, с очевидными видоизменениями, на гиперболические системы с любым числом пространственных переменных и $A_k, B = \text{const}$. Отметим, что близкая схема в частной ситуации была применена ранее в работе [12].

4. Распространение звуковой волны $\rho(x, t)$ в газе, движущемся со скоростью $\vartheta(x, t)$ под действием диссипативной силы («трения») с плотностью $f(x, t)$, описывается задачей Коши для системы уравнений акустики ([14], с. 158)

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vartheta = 0, \\ \rho_0 \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \text{grad } \rho = -f, \\ \rho(x, 0), \vartheta(x, 0) - \text{заданы.} \end{cases} \quad (13)$$

Здесь ρ_0, c_0 — плотность газа в состоянии термодинамического равновесия и скорость звука. В предположении, что течение газа двумерное: $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)^T, x = (x_1, x_2)$, начальные данные достаточно гладкие и финитные и плотность силы f пропорциональна ско-

рости газа: $f = k\partial$, $k = \text{const} \geq 0$, задача Коши (13) принимает вид (5), где $N = 3$, $u = (\rho, \partial_1, \partial_2)T$, L оператор (4) с матрицами

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\rho_0 c_0^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \rho_0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\rho_0 c_0^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \rho_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = -\frac{k}{\rho_0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычисления по формулам п. 2 дают

$$A_\varphi = Z_\varphi \begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_0 \end{bmatrix} Z_\varphi^{-1},$$

$$Z_\varphi = \begin{bmatrix} -\rho_0 c_0 & 0 & -\rho_0 c_0 \\ \omega_1 & \omega_2 & -\omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & -\omega_2 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$U_k(t, \varphi) = e^{-\frac{kt}{2\rho_0}} Z_\varphi P_k Z_\varphi^{-1} \quad (k=1,3),$$

$$U_2(t, \varphi) = e^{-\frac{kt}{\rho_0}} Z_\varphi P_2 Z_\varphi^{-1}, \quad (15)$$

$$V(s, t, \varphi) = \frac{ke^{-\frac{kt}{2\rho_0}}}{4\rho_0 c_0} Z_\varphi \begin{bmatrix} v_{11} & 0 & v_{31} \\ 0 & 0 & 0 \\ v_{13} & 0 & v_{33} \end{bmatrix} Z_\varphi^{-1},$$

$$(|t| \geq \frac{|s|}{c_0}), \quad (16)$$

$$\text{где } v_{11} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} I_1\left(\frac{kr}{2\rho_0}\right), \quad v_{33} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} I_1\left(\frac{kr}{2\rho_0}\right),$$

$v_{13} = v_{31} = I_0\left(\frac{kr}{2\rho_0}\right)$, $r_{1,2} = t \mp \frac{s}{c_0}$, $r = \sqrt{r_1 r_2}$, $I_k(s)$ — функции Бесселя мнимого аргумента, $P_k = \text{diag}(\delta_{1k}, \delta_{2k}, \delta_{3k})$, δ_{ij} — символ Кронекера.

Из формулы (14) для матрицы A_φ следует, что здесь выполнено требование (9) (при этом собственные числа A_φ не зависят от φ). Поэтому, в силу теоремы 2, решение задачи Коши (13) вычисляется по начальным данным и параметрам ρ_0, c_0, k по формулам (8), (11), (12), где $N = 3$, $\alpha_1 = c_0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = -c_0, U_k, V$ -матрицы (15), (16).

Библиографический список

1. Романовский, Р. К. О матрицах Римана первого и второго рода / Р. К. Романовский // Докл. АН СССР. — 1982. — Т. 267, № 3. — С. 577–580.

2. Романовский, Р. К. О матрицах Римана первого и второго рода / Р. К. Романовский // Матем. сб. — 1985. — Т. 127, № 4. — С. 494–501.

3. Романовский, Р. К. Экспоненциально расщепляемые гиперболические системы с двумя независимыми переменными / Р. К. Романовский // Матем. сб. — 1987. — Т. 133, № 3. — С. 341–355.

4. Романовский, Р. К. Об операторе монодромии гиперболической системы с периодическими коэффициентами / Р. К. Романовский // Применение методов функционального анализа в задачах математической физики. — Киев, 1987. — С. 47–52.

5. Романовский, Р. К. Усреднение гиперболических уравнений / Р. К. Романовский // Докл. АН СССР. — 1989. — Т. 306, № 2. — С. 286–289.

6. Романовский, Р. К. Метод характеристик для гиперболических краевых задач на плоскости / Е. В. Воробьева, Р. К. Романовский // Сиб. мат. журнал. — 2000. — Т. 41, № 3. — С. 531–540.

7. Романовский, Р. К. Решение одномерной однофазной гиперболической задачи Стефана методом граничных интегральных уравнений / Р. К. Романовский, Е. Н. Стратилатова // Сиб. журн. индустриальной математики. — 2004. — Т. 7, № 3 (19). — С. 119–131.

8. Романовский, Р. К. Метод Римана для гиперболических систем / Е. В. Воробьева, Р. К. Романовский, Е. Н. Стратилатова. — Новосибирск: Наука, 2007. — 170 с.

9. Жукова, О. Г. Граничное управление процессом теплопереноса в одномерном материале. Гиперболическая модель / О. Г. Жукова, Р. К. Романовский // Дифференц. уравнения. — 2007. — Т. 43, № 5. — С. 650–654.

10. Жукова, О. Г. Двустороннее граничное управление процессом теплопереноса в одномерном материале. Гиперболическая модель / О. Г. Жукова, Р. К. Романовский // Сиб. журн. индустриальной математики. — 2007. — Т. 10, № 4(32). — С. 32–40.

11. Жукова, О. Г. Граничное управление гиперболической системой уравнений теплопроводности / О. Г. Жукова // Дифференц. уравнения. — 2008. — Т. 44, № 1. — С. 82–88.

12. Романовский, Р. К. Граничное управление процессом теплопереноса в двумерном материале. Гиперболическая модель / О. Г. Жукова, Р. К. Романовский // Сиб. журн. индустриальной математики. — 2008. — Т. 11, № 3(35). — С. 119–125.

13. Жукова, О. Г. Граничное управление процессом теплопереноса в трехмерном материале. Гиперболическая модель / О. Г. Жукова // Дифференц. уравнения. — 2009. — Т. 45, № 12. — С. 1794–1798.

14. Годунов, С. К. Уравнения математической физики / С. К. Годунов. — М.: Наука, 1979. — 392 с.

РОМАНОВСКИЙ Рэм Константинович, доктор физико-математических наук, профессор (Россия), профессор кафедры «Прикладная математика и фундаментальная информатика».

СВАЛОВА Анна Ивановна, студент-магистрант группы ВМ-511, кафедра «Прикладная математика и фундаментальная информатика». Адрес для переписки: svalovaai@list.ru

Статья поступила в редакцию 14.06.2012 г.
© Р. К. Романовский, А. И. Свалова

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО КОМПЛЕКТА СТРУКТУР ТЕСТОВ ДЛЯ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

Для решения проблемы определения содержания теста предложен и развивается подход, основанный на применении моделей и алгоритмов дискретной оптимизации. Ранее он был использован нами для формирования оптимальной структуры теста при разработке компьютерной тестирующей системы по одной из учебных дисциплин. В данной работе ставится задача формирования оптимального комплекта структур тестов, позволяющего получить объективную оценку знаний не только отдельного студента, но и оценить усвоение каждого элемента дисциплины группой обучаемых. Предлагаются соответствующие математические модели и приводятся экспериментальные расчеты.

Ключевые слова: контроль знаний, компьютерное тестирование, математическое моделирование, целочисленное программирование.

Статья написана при финансовой поддержке проекта РФФИ № 10-01-00598, Интеграционного проекта СО РАН № 7Б.

Введение. При реализации компетентностного подхода в высшей школе наряду с определением целей образования, отбором его содержания и организацией учебного процесса не менее важную роль играют современные процедуры оценки результатов обучения, к которым относится и компьютерное тестирование. Специфика заданий по математическим дисциплинам, позволяющая генерировать их во время сеанса тестирования в соответствии с некоторыми алгоритмами, и возможность изменения содержания теста в зависимости от текущих целей открывают широкие перспективы для автоматизации процессов создания тестов и непосредственно самого тестирования. Одной из важнейших проблем применения тестов контроля знаний остается определение их содержания, т.е. наилучшего отражения учебного курса в системе тестовых заданий.

В настоящее время разработано достаточно много универсальных компьютерных систем для создания тестов. В большинстве из них содержание теста определяется преподавателем исходя из его опыта и субъективных предпочтений с целью оценки знаний отдельного студента. При значительном объеме учебного курса содержание теста не всегда полностью отражает его материал, а это необходимо для получения объективной информации о результатах обучения и, как следствие, своевременной корректировки учебного процесса.

В [1–8] предложен и развивается подход к определению оптимального содержания теста, основанный на применении дискретной оптимизации. В рамках этого подхода нами введено понятие оптимальной структуры теста (ОСТ), предложены содержательные постановки задачи для определения ОСТ и описаны соответствующие математические модели, в которых учитываются число заданий, включенных в тест, их тип, и т.п. Применение данного подхода при формировании тестов по одной из

тем учебного курса «Экономико-математические методы» показало его перспективность для оценки знаний отдельного студента. Однако использование единственной структуры теста не всегда обеспечивает проверку степени усвоения всего изучаемого материала группой обучаемых. В данной работе для решения этой проблемы ставится задача формирования комплекта структур тестов с необходимыми свойствами.

В первом параграфе работы приводятся краткие сведения о подходе к формированию ОСТ. Во втором параграфе описаны разработанные математические модели для решения задачи формирования оптимального комплекта тестов. В третьем параграфе обсуждаются опыт использования моделей из [4] при разработке компьютерной системы, а также результаты проведенных расчетов для моделей, предложенных в работе. В заключение рассматриваются возможности дальнейшего развития представленного подхода.

1. Формирование оптимальной структуры теста. В соответствии с предложенной нами методикой [2, 4, 6] для проверяемого учебного курса определяются элементы знаний (основные понятия, свойства и утверждения и т.п.). Ключевые элементы дисциплины образуют базовое множество, а остальные — дополнительное, которые обозначим соответственно через **B** и **C**. Под *типовым тестовым заданием* далее понимается задание, которое направлено на проверку определенного подмножества элементов знаний. Оно включает как формулировку задания в общем виде, так и способы конструирования предлагаемых ответов. При программной реализации типовому тестовому заданию соответствует определенная процедура, с помощью которой в процессе тестирования происходит формирование *варианта типового задания*. Его исходные данные генерируются случайным образом или в соответствии с неко-

торыми правилами. Отметим, что изменение данных не влечет изменения проверяемого подмножества элементов знаний. Структурой теста будем называть набор типовых заданий, включенных в тест, а оптимальной структурой — набор заданий, выполнение которого позволяет сделать объективный вывод о степени усвоения испытуемым рассматриваемой дисциплины и удовлетворяющий некоторому критерию. Таким образом, тест составляют варианты типовых заданий, определенные оптимальной структурой.

В [4] задача формирования ОСТ была поставлена нами следующим образом. Требуется найти набор фиксированного числа типовых тестовых заданий, который обеспечивает проверку знаний всех элементов базового множества и максимального числа элементов дополнительного множества. В постановке задачи размер теста является входным параметром, необходимость введения которого вызвана ограничением времени тестирования. Приведем соответствующую математическую модель.

Пусть n — число разработанных типовых тестовых заданий; l — количество групп, на которые они разбиты по определенному признаку (например, аналитические, графические, алгоритмические и т.д.); J_t — множество типовых заданий в группе с номером t , $t = 1, \dots, l$; k — количество заданий, включаемых в тест; $B = \{1, \dots, m_1\}$ и $C = \{1, \dots, m_2\}$ — множества индексов базовых и дополнительных элементов знаний; $A = (a_{ij})$ — булева матрица размера $m_1 \times n$, где $a_{ij} = 1$, если задание j проверяет i -ый элемент знаний из B , и $a_{ij} = 0$ иначе; $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ — булева матрица размера $m_2 \times n$, причём $\tilde{a}_{ij} = 1$, если задание j проверяет элемент знаний с номером i из C , и $\tilde{a}_{ij} = 0$ иначе.

Введем вектор x основных переменных: $x_j = 1$, если задание j включено в тест, и $x_j = 0$ иначе, $j = 1, \dots, n$, и вектор $v = (v_1, \dots, v_{m_2})$ вспомогательных переменных. Равенство $v_i = 1$ в некотором допустимом решении (x', v') означает, что i -ый элемент знаний из C проверяется хотя бы одним из тестовых заданий с номером j , для которого $x_j = 1$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Задача целочисленного линейного программирования (ЦЛП) для формирования ОСТ имеет следующий вид:

$$f(x, v) = \sum_{i=1}^{m_2} v_i \rightarrow \max \quad (1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n x_j = k, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 1, \quad i \in B, \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j - v_i \geq 0, \quad i \in C, \quad (4)$$

$$\sum_{j \in J_t} x_j \geq 1, \quad t = 1, \dots, l, \quad (5)$$

$$x_j, v_i \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n, \quad i \in C. \quad (6)$$

Здесь целевая функция (1) состоит в максимизации количества проверяемых элементов множества C , условие (2) — требование включения в структуру теста k заданий. Ограничения (3) обеспечивают проверку всех элементов из B , а неравенства (4) отражают возможность проверки любого элемента из C . Ограничения (5) описывают необходимость использования в тесте хотя бы по одному заданию

из каждой группы, что обеспечивает разнообразие теста.

Если в матрице A отсутствуют нулевые строки, то существуют значения параметра k , при которых задача (1) — (6) имеет оптимальное решение. Для поиска такого решения могут быть применены известные алгоритмы ЦЛП (в частности, модификация алгоритма перебора L -классов из [3]).

Опыт применения этой модели показал, что полученные тесты позволяют достаточно объективно оценить знания каждого студента, т.е. они являются нормативно-ориентированными [9]. Следует отметить, что часть элементов дополнительного множества при этом может оказаться непроверенной ни в одном задании теста, а следовательно, преподаватель не получит полную информацию о результатах обучения. В связи с этим в [5] нами был поставлен вопрос о формировании комплекта структур тестов, обеспечивающего полноту проверки усвоения учебного материала группой обучаемых, что соответствует целям критериально-ориентированных тестов [9].

2. Формирование оптимального комплекта структур тестов. Предположим, что оптимальное решение задачи (1) — (6) не является единственным, причём не все элементы множества C проверяются в каждом из таких решений. В этом случае появляется возможность выбора комплекта оптимальных структур тестов, позволяющего не только объективно оценить полученные знания отдельного испытуемого, но и усвоение всего материала учебного курса потоком студентов в целом. Для приближенного решения этой задачи можно построить итерационный процесс жадного типа на основе математической модели формирования ОСТ (1) — (6). Каждая итерация этого процесса состоит в решении задачи (1) — (6), т.е. нахождении очередной оптимальной структуры теста, включении ее в определяемый комплект и исключении из C элементов знаний, которые проверяются данной структурой. Процесс останавливается, когда множество C оказывается пустым. Очевидно, что число итераций не превосходит m_2 .

Эффективность использования искомого комплекта напрямую зависит от числа входящих в него структур. В частности, при большом числе структур тестов в сформированном комплекте не будет обеспечена необходимая для получения объективного вывода частота проверки каждого элемента знаний из дополнительного множества. Пусть N_s — число студентов, участвующих в тестировании, а N_T — мощность комплекта структур тестов, в котором каждый элемент из дополнительного множества проверяется не менее d раз, тогда dN_s/N_T — гарантированное число студентов, которые участвуют в проверке каждого элемента знаний из этого множества. Для повышения информативности результатов тестирования по всему курсу необходимо максимизировать величину dN_s/N_T , что эквивалентно минимизации мощности комплекта структур тестов при фиксированных значениях d и N_s или максимизации d при заданных значениях N_s и N_T . Отсюда вытекают две постановки задачи формирования оптимального комплекта структур тестов (ОКСТ).

В первой из них требуется найти комплект минимальной мощности из структур тестов фиксированного размера при условиях, что все элементы из базового множества проверяются в каждой структуре комплекта, а любой элемент из дополнительного множества проверяется, по крайней мере, в заданном количестве структур этого комплекта.

Построим математическую модель для поиска оптимального решения задачи формирования ОКСТ. Будем считать, что задана верхняя граница T для числа структур тестов в формируемом комплексе, где $T \leq m_2$. Введем переменные $z_t, x_{tj}, y_{ti}, t=1, \dots, T, j=1, \dots, n, i=1, \dots, m_2$:

$z_t = 1$, если структура с номером t сформирована, и $z_t = 0$ иначе;

$x_{tj} = 1$, если задание j включено в структуру t , и $x_{tj} = 0$ иначе;

$y_{ti} = 1$, если элемент i из C проверяется в структуре t , и $y_{ti} = 0$ иначе.

Теперь модель ЦАП для указанной постановки задачи имеет вид:

$$\sum_{t=1}^T z_t \rightarrow \min \quad (7)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n x_{tj} = kz_t, \quad t=1, \dots, T, \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_{tj} \geq z_t, \quad t=1, \dots, T, \quad i \in B, \quad (9)$$

$$y_{ti} \leq \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_{tj} \leq ky_{ti}, \quad t=1, \dots, T, \quad i \in C, \quad (10)$$

$$\sum_{t=1}^T y_{ti} \geq d, \quad i \in C, \quad (11)$$

$$z_t, y_{ti}, x_{tj} \in \{0, 1\}, \quad t=1, \dots, T, \quad j=1, \dots, n, \quad i \in C. \quad (12)$$

Здесь целевая функция (7) минимизирует мощность формируемого комплекта структур тестов. Условия (8) описывают требования включения в структуру с номером t ровно k заданий тогда и только тогда, когда структура с этим номером формируется. Ограничения (9) обеспечивают проверку всех элементов из B в каждой сформированной структуре теста. Неравенства (10) гарантируют, что переменная y_{ti} равна единице тогда и только тогда, когда в структуре t найдется хотя бы одно задание, проверяющее свойство i из C . Условия (11) обеспечивают проверку в оптимальном комплекте каждого элемента из C не менее чем d различными структурами.

Рассмотрим другую постановку задачи формирования ОКСТ. *Требуется найти комплект структур тестов, который максимизирует гарантированное число проверок любого элемента дополнительного множества при условиях, что все элементы базового множества проверяются в каждой структуре комплекта, а число заданий в каждой структуре принадлежит указанному диапазону.* Математическая модель этой задачи имеет вид:

$$d \rightarrow \max \quad (13)$$

при условиях (9), (11), (12) и

$$k_1 z_t \leq \sum_{j=1}^n x_{tj} \leq k_2 z_t, \quad t=1, \dots, T, \quad (14)$$

$$y_{ti} \leq \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_{tj} \leq k_2 y_{ti}, \quad t=1, \dots, T, \quad i \in C. \quad (15)$$

Здесь целевая функция (13) максимизирует гарантированное число проверок любого элемента дополнительного множества. Условия (14) описывают требования включения в структуру с номером t не менее k_1 и не более k_2 заданий, если она формирует-

ся, и в противном случае структура не содержит ни одного задания. Неравенства (15) гарантируют, что переменная y_{ti} равна единице тогда и только тогда, когда в структуре t найдется хотя бы одно задание, проверяющее элемент i из C . Заметим, что все рассмотренные задачи ЦАП относятся к классу NP-трудных.

3. Создание системы компьютерного тестирования на основе моделей дискретной оптимизации. На основе описанной методики нами в интегрированной среде разработки Embarcadero Delphi 2010 была создана система компьютерного тестирования EMM_test по учебной дисциплине «Экономико-математические методы» для студентов экономических специальностей [4].

По теме «Линейное программирование» этой дисциплины на основе модели (1)–(6) были получены оптимальные структуры тестов при различных значениях числа заданий в них. Для этого в соответствии со стандартом курса по указанной теме было выделено 38 элементов знаний, 11 из которых включены в базовое множество, остальные — в дополнительное. На основе ряда сборников задач и авторских разработок был подготовлен набор из 35 тестовых заданий, которые прошли экспериментальную проверку при проведении зачета в традиционной форме. Расчеты показали, что для этих данных задача (1)–(6) разрешима при минимальном значении k , равном 7. В этом случае проверяются все элементы знаний базового множества и 13 элементов дополнительного множества. Проверку всех элементов знаний обеспечивают 15 заданий.

Система EMM_test состоит из модуля преподавателя и модуля тестирования. Первый содержит блоки создания файлов заданий, формирования ОСТ, просмотра и анализа результатов тестирования. В блоке формирования ОСТ имеется диалоговое окно, в котором преподаватель задает количество заданий, которые войдут в структуру, и выбирает базовые в списке элементов знаний по заданной теме. В соответствии с полученными данными в системе строится задача (1)–(6), которая решается вариантом алгоритма перебора L -классов из [3]. Результатом является некоторая оптимальная структура теста. Например, структура теста, состоящая из 12 заданий, при проверке всех элементов базового множества обеспечивает проверку 67% элементов дополнительного множества, что составляет 75% всех элементов знаний. Для проведения итогового контроля знаний по всему учебному курсу имеется дополнительная возможность включения в тест заданий по темам «Транспортная задача», «Задача коммивояжера» и «Динамическое программирование».

Модуль тестирования предназначен для формирования тестовых заданий в соответствии с определенной структурой и предъявления теста студенту. После окончания сеанса тестирования он может ознакомиться с протоколом выполнения заданий. Отметим, что в системе реализовано три подхода к формированию тестовых заданий: генерирование в соответствии с некоторыми алгоритмами с использованием датчика случайных чисел; формирование при помощи специальной утилиты и сохранение в файле; конструирование с использованием имеющегося набора графических файлов.

Опыт применения системы EMM_test на заочном отделении экономического факультета ОмГУ им. Ф. М. Достоевского в течение пяти лет подтвер-

дил значительное повышение качества и объективности проверки знаний при сокращении в несколько раз временных затрат преподавателя на подготовку и проведение итогового контроля.

Математические модели, предложенные в данной работе, позволили сформировать оптимальные комплекты структур тестов по теме «Линейное программирование». Для приведенных выше исходных данных была построена задача ЦЛП (7) – (12), которая решалась с помощью пакета IBM ILOG CPLEX. Например, для параметра k , изменяющегося от 8 до 15, и $d = 1$ были получены оптимальные комплекты, содержащие до пяти структур тестов. Интересным является комплект, содержащий две структуры, каждая из которых состоит из десяти тестовых заданий. При равномерном распределении этих структур среди студентов знание любого элемента дополнительного множества будет проверено, по крайней мере, у каждого второго студента, что, на наш взгляд, дает возможность сделать вывод о степени усвоения учебного материала. Использование моделей формирования ОКСТ в системе EMM_test позволяет не только повысить качество контроля знаний, но и совершенствовать процесс обучения.

Заключение. Ранее в [1–6] был предложен подход к формированию оптимальной структуры теста, основанный на применении дискретной оптимизации. Он был использован авторами при разработке системы компьютерного контроля знаний. Опыт ее использования для проведения зачета на заочном отделении экономического факультета ОмГУ показал перспективность описанного подхода. Отметим, что он может быть применен для разработки тестов по другим дисциплинам. Например, в [7, 8] он использован при формировании тестов по курсу «Информатика» для гуманитарных специальностей вузов.

В данной работе поставлена задача формирования оптимального комплекта структур тестов, позволяющего получить не только объективную оценку знаний отдельного студента, но и оценить степень усвоения всего объема учебного курса потоком студентов. Предложены соответствующие математические модели, проведены экспериментальные расчеты.

В дальнейшем предполагается разработка математических моделей для формирования оптимальных комплектов структур тестов с учетом сложности заданий, времени их выполнения и других ограничений, а также применение этих моделей при разработке автоматизированных систем контроля знаний.

Библиографический список

1. Заозерская, Л. А. Об одной автоматизированной системе тестирования знаний студентов по экономико-математическим методам [Текст] / Л. А. Заозерская, А. А. Колоколов,

В. А. Планкова // Moscow Education Online 2010 : сб. тез./ докл. IV междунар. конф. – М. : ООО «Global Conferences», 2010. – С. 130–133.

2. Заозерская, Л. А. Разработка автоматизированной системы контроля знаний с использованием моделей дискретной оптимизации [Текст] / Л. А. Заозерская, А. А. Колоколов, В. А. Планкова // Moscow Education Online 2009 : сб. тез. докл. конф. – М. : ООО «Global Conferences», 2009. – С. 255–258.

3. Заозерская, Л. А. Разработка алгоритмов перебора L -классов для одной задачи компьютерного тестирования [Текст] / Л. А. Заозерская, А. А. Колоколов, В. А. Планкова // Омский научный вестник. – 2008. – № 1(64). – С. 10–12.

4. Заозерская, Л. А. Применение моделей дискретной оптимизации при разработке автоматизированной тестирующей системы [Текст] / Л. А. Заозерская, В. А. Планкова // Вестник Новосибирского государственного университета. Сер. Информационные технологии. – 2008. – Т. 6 (Вып. 1). – С. 47–52.

5. Заозерская, Л. А. Разработка и применение автоматизированной системы контроля знаний по экономико-математическим методам [Текст] / Л. А. Заозерская, В. А. Планкова // Проблемы оптимизации и экономические приложения : материалы IV Всерос. конф. – Омск : Полиграфический центр Кан, 2009. – С. 224.

6. Заозерская, Л. А. Создание автоматизированной системы компьютерного тестирования с использованием дискретной оптимизации [Текст] / Л. А. Заозерская, В. А. Планкова // Новые информационные технологии в университетском образовании : тез. науч.-метод. конф. – Новосибирск : ИЭПМ СО РАО, 2007. – С. 82–83.

7. Колоколов, А. А. Разработка и применение моделей дискретной оптимизации при формировании тестов по информатике / А. А. Колоколов, Л. В. Ларина // Вестник Омского университета. – 2011. – № 2. – С. 173–175.

8. Колоколов, А. А. Формирование проверочных тестов по информатике с использованием дискретной оптимизации [Текст] / А. А. Колоколов, Л. В. Ларина // Применение новых технологий в образовании : материалы XX Междунар. конф. – Троицк : МОФ фонд новых технологий в образовании «Байтик», 2009. – С. 408–410.

9. Ким, В. С. Тестирование учебных достижений : монография / В. С. Ким. – Уссурийск : Изд-во УГПИ, 2007. – 214 с.

ЗАОЗЕРСКАЯ Лидия Анатольевна, кандидат физико-математических наук, доцент (Россия), старший научный сотрудник лаборатории дискретной оптимизации.

Адрес для переписки: e-mail: zaozer@ofim.oscsbras.ru
ПЛАНКОВА Валентина Александровна, старший научный сотрудник лаборатории теоретико-вероятностных методов.

Адрес для переписки: e-mail: plankova@ofim.oscsbras.ru

Статья поступила в редакцию 30.05.2012 г.

© Л. А. Заозерская, В. А. Планкова